

A.1.1(b)

AHA23057 石川由展

 $\alpha > 0$ のとき十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$|a_n| \geq \frac{|\alpha|}{4} \text{ を示す}$$

 $\{a_n\}$ が α に収束するため

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

ここで ε は任意より $\varepsilon = \frac{3}{4}|\alpha|$ とすると $n \geq N_1(\frac{3}{4}|\alpha|)$ に対し

$$|a_n| \geq |\alpha| - |a_n - \alpha| \geq |\alpha| - \frac{3}{4}|\alpha| = \frac{|\alpha|}{4}$$

よって $n \geq N_1(\frac{3}{4}|\alpha|)$ のとき $|a_n| \geq \frac{|\alpha|}{4}$ また $\{a_n\}$ は α に収束するため

$$N_2(\varepsilon) = N_1(\frac{3\sqrt{\alpha}}{2}\varepsilon) \text{ とすると } n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{3\sqrt{\alpha}}{2}\varepsilon \text{ となる}$$

 $N := \{N_1(\frac{3}{4}|\alpha|), N_2(\varepsilon)\}$ とすると任意の $n \geq N$ に対し

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{\alpha}| = \frac{|a_n - \alpha|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{\alpha}|} \leq \frac{|a_n - \alpha|}{|\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha}|} < \frac{\frac{3\sqrt{\alpha}}{2}\varepsilon}{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha}} = \varepsilon$$

よって $\alpha > 0$ のとき実数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ は収束しその収束値は $\sqrt{\alpha}$ である。 $\alpha = 0$ のとき問題より $a_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) から $a_n > 0$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$$

$$\text{ここで [示すこと: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow |\sqrt{a_n}| < \varepsilon]$$

 $\forall \varepsilon > 0$ をとる

$$[\text{示すこと: } \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow |\sqrt{a_n}| < \varepsilon]$$

$$\text{条件より } \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$$

よって $N_2(\varepsilon) := N_1(\varepsilon^2) \in \mathbb{N}$ とすると

$$n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| < \varepsilon^2$$

$$[\text{示すこと: } n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow |\sqrt{a_n}| < \varepsilon]$$

$$n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| < \varepsilon^2 \text{ より } \varepsilon > 0 \text{ のため}$$

$$n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow |\sqrt{a_n}| < \varepsilon$$

よって $\alpha = 0$ のとき成り立つ。