


A.1.1.(c) AHA23014 糸筒垣秀幸

$a_n \rightarrow \alpha$ かつ $a_n^3 \rightarrow \alpha^3$ を示す.

$\forall \varepsilon > 0$ に対して.

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{3|\alpha|^2 + 3|\alpha| + 1} \right\} \text{ とすると } \delta > 0.$$

仮定より、 $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon > 0 \forall n > N_\varepsilon \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$

より上の N_δ に対して $\forall n > N_\delta$ に対して.

$$\begin{aligned} |a_n^3 - \alpha^3| &\leq |3\alpha^2(a_n - \alpha) + 3\alpha(a_n - \alpha)^2 + (a_n - \alpha)^3| \\ &\leq 3|\alpha|^2|a_n - \alpha| \\ &\quad + 3|\alpha||a_n - \alpha|^2 + |a_n - \alpha|^3 \\ &\leq 3|\alpha|^2\delta + 3|\alpha|\delta^2 + \delta^3 \\ &\leq (3|\alpha|^2 + 3|\alpha| + 1)\delta \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon > 0 \forall n > M_\varepsilon, |a_n^3 - \alpha^3| < \varepsilon$$

$$\therefore a_n^3 \rightarrow \alpha^3 \quad (n \rightarrow \infty)$$

□