数学基礎演習 2_A.1.2(b)

AHA23005　板倉洸基

問. 実数列$\{a_n\},\{b_n\}$がそれぞれ α, β に収束するとき、数列$\{|a_n-b_n|\}$は収束するか否か。

解. 収束する。

pf. $\{a_n\},\{b_n\}$はそれぞれ α, β に収束するから、

「$\forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N}_a\ s.t. \forall n\in\mathbb{N}(n\geq \mathrm{N}_a), |a_n-\alpha|<\varepsilon$」,

「$\forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N}_b\ s.t. \forall n\in\mathbb{N}(n\geq \mathrm{N}_b), |b_n-\beta|<\varepsilon$」

よって、$\mathrm{N}(\varepsilon)\coloneqq\max\{\mathrm{N}_a,\mathrm{N}_b\}$とすると、

「$\forall \varepsilon>0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon)\ s.t. \forall n\in\mathbb{N}\big(n\geq \mathrm{N}(\varepsilon)\big), |a_n-\alpha|<\varepsilon, |b_n-\beta|<\varepsilon$」…①

次に、$\forall x,y\in\mathbb{R}$ に対して、

$|x|=|(x-y)+y|\leq|x-y|+|y|, |y|=|(y-x)+x|\leq|y-x|+|x|$

$\therefore -|x-y|\leq|x|-|y|\leq|x-y|$

$\therefore \big||x|-|y|\big|\leq|x-y|$…②

任意の$\varepsilon'>0$をとり、$\varepsilon=\frac{1}{2}\varepsilon'$とおくと、$\varepsilon>0$となるから、①を適用できる。

よって、$\mathrm{N}'(\varepsilon')\coloneqq\mathrm{N}\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)$とすると、全ての$n\in\mathbb{N}\big(n\geq\mathrm{N}'(\varepsilon')\big)$に対し、

$|a_n-\alpha|<\frac{1}{2}\varepsilon', |b_n-\beta|<\frac{1}{2}\varepsilon'$

$\therefore -\frac{1}{2}\varepsilon'<a_n-\alpha<\frac{1}{2}\varepsilon', -\frac{1}{2}\varepsilon'<-b_n+\beta<\frac{1}{2}\varepsilon'$

$\therefore -\varepsilon'<(a_n-\alpha)+(-b_n+\beta)<\varepsilon'$

$\therefore |(a_n-b_n)-(\alpha-\beta)|<\varepsilon'$…③が成立する。

また、$\{a_n\},\{b_n\}$は実数列であるため、a_n,b_n,α,βは全て実数なので、

$a_n-b_n,\alpha-\beta$も共に実数だから、

$x\coloneqq a_n-b_n, y\coloneqq\alpha-\beta$として②を適用できる。

よって、$\big||a_n-b_n|-|\alpha-\beta|\big|\leq|(a_n-b_n)-(\alpha-\beta)|$…④となる。

③,④より、$\big||a_n-b_n|-|\alpha-\beta|\big|<\varepsilon'$

よって、

「$\forall\varepsilon'>0, \exists\mathrm{N}'(\varepsilon')\in\mathbb{N}\ s.t. \forall n\in\mathbb{N}\big(n\geq\mathrm{N}'(\varepsilon')\big), \big||a_n-b_n|-|\alpha-\beta|\big|<\varepsilon'$」

が成り立つ。

即ち、数列$\{|a_n-b_n|\}$は収束し、その極限値は$|\alpha-\beta|$である。■