

まず、 $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_n, b_n > 0$ を示す。

(1) $n=0$ のとき、 $0 < a_0 < b_0$ より成立。

(2) $n=k$ のとき、 $a_k > 0, b_k > 0$ を仮定すると

$$n=k+1 \text{ のとき、} a_{k+1} = \sqrt{a_k b_k} = \sqrt{a_k} \times \sqrt{b_k} > 0 \times 0 = 0$$

$$b_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2} > 0 + 0 = 0$$

(1),(2)より数学的帰納法から $a_n > 0, b_n > 0$ —(*)

次に、 $b_n - a_n$ を考えると、

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} + a_{n-1}}{2} - \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} = \frac{(\sqrt{b_{n-1}} - \sqrt{a_{n-1}})^2}{2} \geq 0$$

より、 $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geq a_n$ —①

また、 $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n$, ①より $a_n - b_n \leq 0$, よって $b_{n+1} \leq b_n$ —②

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n = a_n \left(\sqrt{\frac{b_n}{a_n}} - 1 \right)$$

$$\text{① より } \frac{b_n}{a_n} > 1, (*) \text{ より } \frac{b_n}{a_n} > 0 \text{ なので、} \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} > 1 \text{ —③}$$

したがって①②③より、以下の関係が成り立つ。

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$$

よって、 a_n は上に有界(b_0 が蓋となる)な単調増加数列、

b_n は下に有界(a_0 が蓋となる)な単調減少数列

有界単調収束定理から、 a_n と b_n は収束

a_n と b_n が収束することから、 a_n , b_n の収束値をそれぞれ α, β とすると以下が成り立つ。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n_a \in \mathbb{N} : n_a \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{---④}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n_b \in \mathbb{N} : n_b \geq N'_\varepsilon \Rightarrow |b_n - \beta| < \varepsilon \quad \text{---⑤}$$

これから b_n が α に収束することを示す。

ここで $\forall \varepsilon' > 0$ をとり、 $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{3}$ とおき、 $N''_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\} + 1$ とする。

$\forall n' \in \mathbb{N} : n' \geq N''_\varepsilon$ に対して

$$|b_n - \alpha| = |b_{n'} + b_{n'} - b_{n'} + \beta - \beta - \alpha|$$

$$= |b_{n'-1} + a_{n'-1} - b_{n'} + \beta - \beta - \alpha|$$

$$(\text{三角不等式から}) \leq |b_{n'-1} - \beta| + |b_{n'} - \beta| + |a_{n'-1} - \alpha|$$

$$(\text{④, ⑤と } N''_\varepsilon \text{ の取り方から}) \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon = \varepsilon'$$

よって $|b_n - \alpha| < \varepsilon'$ が示せたので b_n は α に収束する。

ここで、 $\forall \varepsilon'' > 0$ をとり、 $\varepsilon = \frac{\varepsilon''}{2}$ とおき、 $N^\#_\varepsilon = \max\{N''_\varepsilon, N'_\varepsilon\}, \forall n^\# \in \mathbb{N} : n^\# \geq N^\#_\varepsilon$ に対して

$$|\alpha - \beta| = |\alpha - b_{n^\#} + b_{n^\#} - \beta| \leq |b_{n^\#} - \alpha| + |b_{n^\#} - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon''$$

となるので、 $|\alpha - \beta| < \varepsilon''$ が示せたことから、 $\alpha - \beta = 0$ となり、 $\alpha = \beta$

すなわち、 a_n と b_n の収束値は等しい。

