数学基礎英語 2_A.2.3(b)

AHA23005　板倉 洸基

prop. $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$: 有界, $k > 0$ に対し、$k\mathrm{A} \coloneqq \{ka \mid a \in \mathrm{A}\}$とすると、

$$\begin{cases} \sup(k\mathrm{A}) = k \sup \mathrm{A} \\ \inf(k\mathrm{A}) = k \inf \mathrm{A} \end{cases}$$

pf.

$s = \sup \mathrm{A}$ とすると、

$$\begin{cases} {}^\forall a \in \mathrm{A}, a \leq s \quad \cdots (i) \\ {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists a \in \mathrm{A}\ s.t.\ s < a + \varepsilon \quad \cdots (ii) \end{cases}$$ が成り立つ。

ここで、${}^\forall a \in k\mathrm{A}$ をとると、

$k\mathrm{A}$ の定義から${}^\exists a_0 \in \mathrm{A}\ s.t.\ a = ka_0$

ここで(i)より、$a_0 \leq s$

$\therefore k > 0$ より、$ka_0 \leq ks$

$\therefore a \leq ks$

以上より、${}^\forall a \in k\mathrm{A}, a \leq ks \ \cdots (iii)$

次に、${}^\forall \varepsilon > 0$ をとると、$k > 0$ より $\dfrac{1}{k}\varepsilon > 0$ だから

(ii)より、${}^\exists a' \in \mathrm{A}\ s.t.\ s < a' + \dfrac{1}{k}\varepsilon$

$\therefore k > 0$ より、$ks < ka' + \varepsilon$

ここで、$a \coloneqq ka'$とすると、$a' \in \mathrm{A}$ より、$a \in k\mathrm{A}$

以上より、${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists a \in k\mathrm{A}\ s.t.\ ks < a + \varepsilon \ \cdots (iv)$

$(iii), (iv)$より、$\sup(k\mathrm{A}) = ks = k \sup \mathrm{A}$

$f = \inf \mathrm{A}$ とすると、

$$\begin{cases} {}^\forall a \in \mathrm{A}, a \geq f \quad \cdots (v) \\ {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists a \in \mathrm{A}\ s.t.\ f > a - \varepsilon \quad \cdots (vi) \end{cases}$$

ここで、${}^\forall a \in k\mathrm{A}$ をとると、

$k\mathrm{A}$ の定義から${}^\exists a_0 \in \mathrm{A}\ s.t.\ a = ka_0$

ここで(v)より、$a_0 \geq f$

$\therefore k > 0$ より、$ka_0 \geq kf$

$\therefore a \geq kf$

以上より、$^\forall a \in k\mathrm{A}, a \geq kf \quad \cdots (vii)$

次に、$^\forall \varepsilon > 0$ をとると、$k > 0$ より $\dfrac{1}{k}\varepsilon > 0$ だから

(vi)より、$^\exists a' \in \mathrm{A}\ s.t.\ f > a' - \dfrac{1}{k}\varepsilon$

$\therefore k > 0$ より、$kf > ka' - \varepsilon$

ここで、$a \coloneqq ka'$とすると、$a' \in \mathrm{A}$ より、$a \in k\mathrm{A}$

以上より、$^\forall \varepsilon > 0, ^\exists a \in k\mathrm{A}\ s.t.\ kf > a - \varepsilon \quad \cdots (viii)$

$(vii), (viii)$より、$\inf(k\mathrm{A}) = kf = k \inf \mathrm{A} \quad \blacksquare$

（補足）

$\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$: 有界、$s, f \in \mathbb{R}$ に対し、

$$s = \sup \mathrm{A} \Leftrightarrow \begin{cases} ^\forall a \in \mathrm{A}, a \leq s \\ ^\forall \varepsilon > 0, ^\exists a \in \mathrm{A}\ s.t.\ s < a + \varepsilon \end{cases}$$

$$f = \inf \mathrm{A} \Leftrightarrow \begin{cases} ^\forall a \in \mathrm{A}, a \geq f \\ ^\forall \varepsilon > 0, ^\exists a \in \mathrm{A}\ s.t.\ f > a - \varepsilon \end{cases}$$

である。

pf.

$\cdot \sup \mathrm{A}$

$(\Rightarrow)$

$s = \sup \mathrm{A}$ とする。

sは A の上界だから、$^\forall a \in \mathrm{A}, a \leq s \cdots$①

$\neg(^\forall \varepsilon > 0, ^\exists a \in \mathrm{A}\ s.t.\ s < a + \varepsilon)$

即ち、$^\exists \varepsilon > 0\ s.t.\ ^\forall a \in \mathrm{A}, s \geq a + \varepsilon$と仮定する。

$s' \coloneqq s - \varepsilon$とすると、

$^\forall a \in \mathrm{A}, s \geq a + \varepsilon$より、$a \leq s - \varepsilon = s'$だから、

$^\forall a \in \mathrm{A}, a \leq s'$となる。

即ち、s'は A の上界の一つである。

ここで、$\varepsilon > 0$ より、$s' = s - \varepsilon < s$であるが、

これは s が A の最小上界であることに矛盾する。

よって、$^\forall \varepsilon > 0, ^\exists a \in \mathrm{A}\ s.t.\ s < a + \varepsilon$は成り立つ。$\cdots$②

①、②より、

$$s = \sup \mathrm{A} \Rightarrow \begin{cases} ^\forall a \in \mathrm{A}, a \leq s \\ ^\forall \varepsilon > 0, ^\exists a \in \mathrm{A}\ s.t.\ s < a + \varepsilon \end{cases}$$

$(\Leftarrow)$

$s \in \mathbb{R}$ が以下を満たすとする。

$$\begin{cases} {}^{\forall}a \in \mathrm{A}, a \leq s \ \cdots③ \\ {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}a \in \mathrm{A}\ s.t. s < a + \varepsilon \ \cdots④ \end{cases}$$

③より、sは A の上界の一つである。

sより小さい A の上界s'が存在すると仮定する。

$\varepsilon \coloneqq s - s'$とすると、$s' < s$より、$\varepsilon = s - s' > 0$ であり、$s' = s - \varepsilon$である。

s'は A の上界だから、

${}^{\forall}a \in \mathrm{A}, a \leq s' = s - \varepsilon$

$\therefore {}^{\forall}a \in \mathrm{A}, s \geq a + \varepsilon$となるが、これは④に矛盾する。

よって、s よりも小さな上界は存在しない。

即ち、s は A の最小上界である。

以上より、

$$\begin{cases} {}^{\forall}a \in \mathrm{A}, a \leq s \\ {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}a \in \mathrm{A}\ s.t. s < a + \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow s = \sup \mathrm{A}$$

以上より、

$$s = \sup \mathrm{A} \Longleftrightarrow \begin{cases} {}^{\forall}a \in \mathrm{A}, a \leq s \\ {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}a \in \mathrm{A}\ s.t. s < a + \varepsilon \end{cases}$$

$\cdot \inf \mathrm{A}$

$(\Longrightarrow)$

$f = \inf \mathrm{A}$ とする。

fは A の下界だから、${}^{\forall}a \in \mathrm{A}, a \geq f \cdots⑤$

$\neg({}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}a \in \mathrm{A}\ s.t. f > a - \varepsilon)$

即ち、${}^{\exists}\varepsilon > 0\ s.t. {}^{\forall}a \in \mathrm{A}, f \leq a - \varepsilon$と仮定する。

$f' \coloneqq f + \varepsilon$とすると、

${}^{\forall}a \in \mathrm{A}, f \leq a - \varepsilon$より、$a \geq f + \varepsilon = f'$だから、

${}^{\forall}a \in \mathrm{A}, a \geq f'$となる。

即ち、f'は A の下界の一つである。

ここで、$\varepsilon > 0$ より、$f' = f + \varepsilon > f$であるが、

これは f が A の最大下界であることに矛盾する。

よって、${}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}a \in \mathrm{A}\ s.t. f > a - \varepsilon$は成り立つ。$\cdots⑥$

⑤、⑥より、

$$f = \inf \mathrm{A} \Longrightarrow \begin{cases} {}^{\forall}a \in \mathrm{A}, a \geq f \\ {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}a \in \mathrm{A}\ s.t. f > a - \varepsilon \end{cases}$$

$(\Longleftarrow)$

$f \in \mathbb{R}$ が以下を満たすとする。

$$\begin{cases} {}^\forall a \in \mathrm{A}, a \geq f \quad \cdots ⑦ \\ {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists a \in \mathrm{A}\ s.t. f > a - \varepsilon \quad \cdots ⑧ \end{cases}$$

⑦より、fは A の下界の一つである。

fより大きい A の下界f'が存在すると仮定する。

$\varepsilon \coloneqq f' - f$とすると、$f' > f$より、$\varepsilon = f' - f > 0$ であり、$f' = f + \varepsilon$である。

f'は A の下界だから、

${}^\forall a \in \mathrm{A}, a \geq f' = f + \varepsilon$

$\therefore {}^\forall a \in \mathrm{A}, f \leq a - \varepsilon$となるが、これは⑧に矛盾する。

よって、f よりも大きな下界は存在しない。

即ち、f は A の最大下界である。

以上より、

$$\begin{cases} {}^\forall a \in \mathrm{A}, a \geq f \\ {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists a \in \mathrm{A}\ s.t. f > a - \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow f = \inf \mathrm{A}$$

以上より、

$$f = \inf \mathrm{A} \Longleftrightarrow \begin{cases} {}^\forall a \in \mathrm{A}, a \geq f \\ {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists a \in \mathrm{A}\ s.t. f > a - \varepsilon \end{cases} \quad \blacksquare$$