

A.2.4

$$I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R} (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ について}$$

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \phi \text{ を示す。}$$

( $\lceil * \rceil$  は天井関数とする)

$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$  の  $n$  は丁度自然数全体を動くので、 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  と書いても同じである。  
 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \phi$ 、つまり  $\nexists x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  を示す。  $\exists x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  と仮定する。このとき、

$$\forall n \in \mathbb{N}, x \in I_n \dots \textcircled{1}$$

$$1 \in \mathbb{N} \text{ と } \textcircled{1} \text{ より } x \in I_1 = (0, 1) \text{ よって } 0 < x < 1$$

$$\text{よって } 1 < \frac{1}{x} \leq \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \text{ このことより}$$

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} \leq x \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \text{ つまり } 1 \leq x \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil$$

$$\frac{1}{\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil} \leq x \dots \textcircled{2} \text{ また、 } \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \in \mathbb{Z} \text{ で } 1 \leq \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \text{ より } \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil \in \mathbb{N}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } x \in I_{\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil} = \left(0, \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil}\right) = I_{\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil}$$

$$\text{しかし、 } \textcircled{2} \left( \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil} \leq x \right) \text{ より } x \notin \left(0, \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil}\right) = I_{\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil}$$

これは $\textcircled{1}$ に矛盾

$$\text{よって背理法により } \nexists x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$$

$$\text{つまり } \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \phi$$