

数学基礎演習 2 A.3.10

問題

\mathbb{R} 上で定義された関数 $f(x)$ が、

$$f(2x) = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

を満たし、かつ $x = 0$ で連続ならば、 $f(x)$ は定数であることを示せ。

Proof.

$f(0) = C$ (C は定数) とおく。

$\forall x \in \mathbb{R}$ をとる。

$\forall \epsilon > 0$ をとる。

$f(x)$ は $x=0$ で連続であるから、

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - C| < \epsilon \cdots (*)$$

ここで、

$$\log_2 \left| \frac{x}{\delta} \right| < n$$

となる n をとると、

$$\left| \frac{x}{\delta} \right| < 2^n$$

$$\left| \frac{x}{2^n} \right| < \delta$$

$$\left| \frac{x}{2^n} - 0 \right| < \delta$$

$$x_n = \frac{x}{2^n} \text{ とおくと、} |x_n - 0| < \delta$$

$$(*) \text{ より、} |f(x_n) - C| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} f(x) &= f(2^n x_n) \\ &= f(2 \cdot 2^{n-1} x_n) \\ &= f(2^{n-1} x_n) \quad (\because f(2x) = f(x)) \\ &= \dots \\ &= f(x_n) \end{aligned}$$

と変形できる

$$\text{よって、} |f(x) - C| = |f(x_n) - C| < \epsilon$$

$\therefore \forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, |f(x) - C| < \epsilon$ が示せた。

$$\text{よって、} f(x) = C$$

$\therefore f(x)$ は定数

□