問A.3.11R 上連続な二つの関数 f(x) と g(x) が、Q 上で一致 するならば、R 上でも一致することを示せ。

∀x∈R,∀ε＞0,∃y∈Q s.t. y∈(x-ε,x+ε) …(A) を示す
x≥0 のとき
∀x∈R(x≥0) ,∀ε＞0 をとり{a_n},{b_n}(∀n∈N, a_n,b_n ∈{0,1,2,⋯,9})を用いて
x=$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots$
ε =$b_0+\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots$ とそれぞれ少数第n位をa_n,b_nとしてあらわせる

b_iをb_0から数えて初めて0でない数だとする.

このとき y=$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_i}{10^i}$とおくと
x-ε<y<x+εとなるので y∈(x-ε,x+ε).
x≤ 0のときは x, ε, a_n , b_n , y を-x, - ε , -a_n , -b_n , -y に置き換えて同様に示される.

∀x∈R,f(x)=g(x)を示す
今、∀x∈Q,f(x)=g(x)なので∃a∈R－Q s.t. f(a)≠g(a)を仮定し矛盾を導く.
f,g の連続性よりこの a∈R−Q についても∀ε＞0,∃δ＞0 s.t. |x-a|< δ →|f(x)-f(a)|<ε, |g(x)-g(a)|<εが成り立ち
(A) より∃x∈Q s.t. x∈(a- δ ,a+ δ) すなわち|x-a|< δ なので f(x)=g(x)より
|f(a)-g(a)|≤|f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)|<2εが成り立つ.

仮定より α:= |f(a)-g(a)|>0 である一方で、εを$\frac{\alpha}{2}$＞ε>0 を満たすようにとれる.
故に α＝|f(x)-g(x)|＜2ε＜ α となり矛盾する. よって主張が示された.