数学演習 A.3.14

AHA23040 額田達也

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ に対し

$$s = \max\left\{1, \frac{\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|}{|a_n|}\right\}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{a_n x^n}$$

と定義する

$g(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{a_n s^n}$
$\geq 1 - \left\{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\frac{1}{|s|} + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|\frac{1}{|s^n|}\right\}$
$\geq 1 - \frac{\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|}{|a_n|}\frac{1}{|s|} \quad (\because |s| \geq 1)$
$\geq 0 (\because |s| \geq \frac{\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|}{|a_n|})$
$\therefore g(s) \geq 0$
$g(s) = 0$ の時 $f(s) = 0$ 以下 $g(s) > 0$ とする
(1)$a_n > 0$ の時 $a_0 < 0$ で $(\because a_0 a_n < 0) f(0) = a_0 < 0$
$g(s) > 0, a_n s^n > 0$ より $f(s) > 0$ 今 f は [0,s] 上連続なので中間値の定理より $\exists\gamma \in (0, s)\ f(\gamma) = 0$
(2)$a_n < 0$ の時 $a_0 > 0$ で $(\because a_0 a_n < 0) f(0) = a_0 > 0$
$g(s) > 0, a_n s^n < 0$ より $f(s) < 0$ 今 f は [0,s] 上連続なので中間値の定理より $\exists\gamma \in (0, s)\ f(\gamma) = 0$
(1)(2) より終わり