

問題 関数 $\sin \frac{1}{x}$ は $(0, +\infty)$ 上一様連続か否か判定せよ.

$\epsilon = 1$ とする.

$\forall \delta > 0$ をとる.

$x(n) = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$, $y(n) = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ とすると
 $x(n), y(n) \in (0, +\infty)$

$a_n = |x(n) - y(n)|$ とすると、

$$\begin{aligned} a_n &= \left| \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \right| \\ &= \frac{\pi}{4\pi^2 n^2 - \frac{\pi^2}{4}} \\ &= \frac{1}{4\pi n^2 - \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$N_\delta = \lceil \sqrt{\frac{1}{4\pi\delta} + \frac{1}{16}} \rceil + 1$ とする.

$\forall n \geq N_\delta$ に対して、

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &= \frac{1}{4\pi n^2 - \frac{\pi}{4}} \\ &\leq \frac{1}{4\pi N_\delta^2 - \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4([\sqrt{\frac{1}{4\pi\delta} + \frac{1}{16}}] + 1)^2 \pi - \frac{\pi}{4}} \\ &< \frac{1}{4(\sqrt{\frac{1}{4\pi\delta} + \frac{1}{16}})^2 \pi - \frac{\pi}{4}} \\ &= \delta \end{aligned}$$

よって、 $|x(n) - y(n)| < \delta$

$$\begin{aligned} \left| \sin\left(\frac{1}{x(n)}\right) - \sin\left(\frac{1}{y(n)}\right) \right| &= \left| \sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \right| \\ &= |(-1) - 1| \\ &= 2 \\ &> 1 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

従って、 $\sin(\frac{1}{x})$ は $(0, \infty)$ 上一様連続ではない $\square$