

問 A.3.2

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ より

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad s.t. \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon \quad \dots(1)$$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ より

$$\forall \epsilon' > 0, \exists \delta' > 0 \quad s.t. \quad |x - a| < \delta' \Rightarrow |g(x) - \beta| < \epsilon' \quad \dots(2)$$

$$\forall \epsilon'' > 0, \exists \delta'' > 0 \quad s.t. \quad |x - a| < \delta'' \Rightarrow |h(x) - \max\{\alpha, \beta\}| < \epsilon''$$

を示す。

任意に $\epsilon'' > 0$ をとる。

$\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon'', \epsilon' = \frac{1}{2}\epsilon''$ とおくと、 $\epsilon, \epsilon' > 0$ となる。

この ϵ に対して (1) の δ を、この ϵ' に対して (2) の δ' をとる。

$\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$ とする。

$|x - a| < \delta''$ とすると $|f(x) - \alpha| < \epsilon, |g(x) - \beta| < \epsilon'$ である。

ここで、

$$\begin{aligned} h(x) = \max\{f(x), g(x)\} &= \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} \\ \max\{\alpha, \beta\} &= \frac{\alpha + \beta + |\beta - \alpha|}{2} \end{aligned}$$

であることに注意する。

また、

$$||f(x) - g(x)| - |\beta - \alpha|| \leq |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta|$$

が成り立つ。

よって、

$$\begin{aligned} |h(x) - \max\{\alpha, \beta\}| &= \left| \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} - \frac{\alpha + \beta + |\beta - \alpha|}{2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \{ |f(x) + g(x) - (\alpha + \beta)| + ||f(x) - g(x)| - |\beta - \alpha|| \} \\ &\leq \frac{1}{2} \{ |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| + |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| \} \\ &= |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| \\ &< \epsilon + \epsilon' \\ &= \epsilon'' \end{aligned}$$

したがって、

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \max\{\alpha, \beta\}$$

が成り立つ。□