

$\forall \varepsilon > 0$ に対し

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha \text{ であり、}$$

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ s.t. } |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ s.t. } |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \alpha| < \varepsilon \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0 \text{ とおくと、} \delta > 0 \text{ で、} \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ であり、}$$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \text{ かつ } |g(x) - \alpha| < \varepsilon \quad \dots \textcircled{3}$$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ であり、}$$

$$f(x) - \alpha \leq h(x) - \alpha \leq g(x) - \alpha$$

$$\textcircled{3} \text{ であり、} -\varepsilon \leq f(x) - \alpha \leq h(x) - \alpha \leq g(x) - \alpha \leq \varepsilon \text{ により、}$$

$$|h(x) - \alpha| < \varepsilon$$

$$\text{以上より、} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x - a| < \delta \Rightarrow |h(x) - \alpha| < \varepsilon$$

により、 $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ は存在し、その値は α である

