

数学基礎演習 2. A.3.4

AHA23005 板倉 洸基

prop.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \\ \lim_{u \rightarrow b} f(u) = c \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = c$$

(反例)

$$g(x) := 0, f(u) := \begin{cases} 0 & (u = 0) \\ 1 & (u \neq 0) \end{cases}$$

と定める。

この時、 $\forall \varepsilon > 0$ をとり、 $\delta := 1$ とおくと、

$\forall u \in \mathbb{R} (0 < |u - 0| < \delta)$ に対して、

$$\begin{aligned} |f(u) - 1| &= |1 - 1| \quad (\because 0 < |u| \text{ より、} u \neq 0) \\ &= 0 < \varepsilon, \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R} (0 < |x - 0| < \delta)$ に対して、

$$|g(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon,$$

$$|f \circ g(x) - 0| = |f(g(x)) - 0| = |f(0) - 0| = |0 - 0| < \varepsilon$$

がそれぞれ成り立つ。

即ち、 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ かつ $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 1$ だが、

$\lim_{x \rightarrow 0} f \circ g(x) = 0 \neq 1$ となっており、これは A.3.4 の反例となる。■

上記の反例は f が連続でないために成り立った。

以下では $u = b$ における f の連続性を仮定して、改めて A.3.4 を示す。

prop.

$\mathbb{R}$ 上で定義された 2 関数 $y = f(u), u = g(x)$ (いずれも連続とは限らない) について、

f が $u = b$ において連続かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \lim_{u \rightarrow b} f(u) = c$ が成立するとき、

合成関数 $y = f \circ g(x) = f(g(x))$ についても

$\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = c$ が成り立つことを ε - δ 論法で示せ。

pf.

$u = b$ において f 連続より、

$$\lceil \forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1(\varepsilon_1) > 0 \text{ s.t. } \forall u \in \mathbb{R} (|u - b| < \delta_1(\varepsilon_1)), |f(u) - f(b)| < \varepsilon_1 \rceil \dots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ より、

$$\lceil \forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2(\varepsilon_2) > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R} (0 < |x - a| < \delta_2(\varepsilon_2)), |g(x) - b| < \varepsilon_2 \rceil \dots \textcircled{2}$$

$\lim_{u \rightarrow b} f(u) = c$ より、

$$\lceil \forall \varepsilon_3 > 0, \exists \delta_3(\varepsilon_3) > 0 \text{ s.t. } \forall u \in \mathbb{R} (0 < |u - b| < \delta_3(\varepsilon_3)), |f(u) - c| < \varepsilon_3 \rceil \dots \textcircled{3}$$

ここで、 $\forall \varepsilon > 0$ をとり、 $\varepsilon_1 := \frac{1}{2}\varepsilon$ とおくと、 $\varepsilon_1 > 0$ より、①を適用できる。

よって、 $\delta'(\varepsilon) := \delta_1\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) > 0$ が存在し、 $\forall u \in \mathbb{R} (|u - b| < \delta'(\varepsilon))$ に対して、
 $|f(u) - f(b)| < \frac{1}{2}\varepsilon \dots \textcircled{4}$ が成り立つ。

また、 $\varepsilon_3 := \frac{1}{2}\varepsilon$ とおくと、 $\varepsilon_3 > 0$ より、③を適用できる。

よって、 $\delta''(\varepsilon) := \delta_3\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) > 0$ が存在し、 $\forall u \in \mathbb{R} (0 < |u - b| < \delta''(\varepsilon))$ に対して、
 $|f(u) - c| < \frac{1}{2}\varepsilon \dots \textcircled{5}$ が成り立つ。

また、 $\varepsilon_2 := \frac{1}{2}\delta''(\varepsilon)$ とおくと、 $\varepsilon_2 > 0$ より、②を適用できる。

よって、 $\delta(\varepsilon) := \delta_2\left(\frac{1}{2}\delta''(\varepsilon)\right) > 0$ が存在し、 $\forall x \in \mathbb{R} (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon))$ に対して、
 $|g(x) - b| < \frac{1}{2}\delta''(\varepsilon) < \delta''(\varepsilon)$
 $\therefore |g(x) - b| < \delta''(\varepsilon) \dots \textcircled{6}$ が成り立つ。

ここで、

(i) $\forall x \in \mathbb{R} (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon), g(x) \neq b)$ に対して、

$x \in \mathbb{R} (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon))$ より、⑥を適用できることと、
 $g(x) \neq b$ であることから $0 < |g(x) - b| < \delta''(\varepsilon)$ なので、
 $u := g(x)$ とおくと、⑤を適用できる。

よって、 $|f(g(x)) - c| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$$\therefore |f \circ g(x) - c| < \varepsilon$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon), g(x) = b)$ に対して、

ある $u' \in \mathbb{R} (0 < |u' - b| < \min(\delta'(\varepsilon), \delta''(\varepsilon)))$ をとると、

$u' \in \mathbb{R} (|u' - b| < \delta'(\varepsilon))$ より、④を適用できる。

よって、 $|f(u') - f(b)| < \frac{1}{2}\varepsilon \dots \textcircled{7}$

また、 $u' \in \mathbb{R} (0 < |u' - b| < \delta''(\varepsilon))$ より、⑤を適用できる。

よって、 $|f(u') - c| < \frac{1}{2}\varepsilon \dots \textcircled{8}$

$$\begin{aligned}
|f \circ g(x) - c| &= |f(g(x)) - c| \\
&= |f(b) - c| \\
&= |f(b) - f(u') + f(u') - c| \\
&\leq |f(u') - f(b)| + |f(u') - c| \\
&\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon \quad (\because \textcircled{7}, \textcircled{8}) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

以上より、「 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R} (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon), |f \circ g(x) - c| < \varepsilon)$ 」

即ち、 $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = c$ が成り立つ。 ■