

関数  $f(x)$  は  $\mathbb{R}$  全体で定義されているとする.

$f(x)$  が有界ならば、任意の実数  $a$  に対し  $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)f(x)$  が存在することを、極限値の定義に戻って示せ.

(注意:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  の存在は仮定していない)

∴  $f(x)$  は有界とする

[示すに:  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  s.t.  $|x-a| < \delta \Rightarrow |(x-a)f(x) - 0| < \varepsilon$ ]

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$  をとる

仮定よりある  $M > 0$  が存在して全ての  $x$  に対して  $|f(x)| \leq M$  が成り立つ

ここで  $\delta := \frac{\varepsilon}{M} (> 0)$  とすると、 $|x-a| < \delta$  のとき

$$|(x-a)f(x)| = |x-a||f(x)|$$

$$\leq |x-a|M$$

$$< \delta M$$

$$= \frac{\varepsilon}{M} M$$

$$= \varepsilon$$

