問A.3.7

$f(x) = x^n$ が $\mathbb{R}$ 上連続であることを ε-δ 論法で示す.

${}^\forall a \in \mathbb{R}$, ${}^\forall \varepsilon > 0$ をとる.

ここで

$$
\begin{aligned}
|x^n - a^n| &= \left|\{(x-a)+a\}^n - a^n\right| \\
&= \left|(x-a)^n + {}_nC_1(x-a)^{n-1}\cdot a + {}_nC_2(x-a)^{n-2}\cdot a^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}(x-a)\cdot a^{n-1} + a^n - a^n\right| \\
&= \left|(x-a)^n + {}_nC_1(x-a)^{n-1}\cdot a + {}_nC_2(x-a)^{n-2}\cdot a^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}(x-a)\cdot a^{n-1}\right| \\
&\leq |x-a|^n + |x-a|^{n-1}\cdot {}_nC_1|a| + |x-a|^{n-2}\cdot {}_nC_2\cdot|a|^2 + \cdots + |x-a|\cdot {}_nC_{n-1}\cdot|a|^{n-1} \\
&\leq |x-a| + |x-a|\,{}_nC_1|a| + |x-a|\cdot{}_nC_2|a|^2 + \cdots + |x-a|\cdot{}_nC_{n-1}\cdot|a|^{n-1} \qquad (|x-a|<1 \text{ と仮定}) \\
&= |x-a|\left(1 + {}_nC_1|a| + \cdots + {}_nC_{n-1}\cdot|a|^{n-1}\right) \\
&= |x-a|\cdot\{(1+|a|)^n - |a|^n\} \\
&\leq \varepsilon \qquad \left(\text{さらに } |x-a| < \frac{\varepsilon}{(1+|a|)^n - |a|^n} \text{ と仮定}\right)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{(1+|a|)^n - |a|^n}\right\}$ とすると $\delta > 0$ で

$|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| = |x^n - a^n| < \varepsilon$ が成り立つ