

12/7 基礎演習 A4-2 AHA23010 石野 優生

「 $\mathbb{R}$ 上連続ではあるが (少なからず) $x=0$ が一点で)

微分不可能な関数の例を一つ与え

微分不可能であることを示す。

ex) $f(x) = |x|$

まず連続性を示す

$\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0$ とする

$\delta = \epsilon$ とおくと

$\forall x \in \mathbb{R} (|x-a| < \delta)$ に対して

$$|f(x) - f(a)| = ||x| - |a|| \leq |x - a| < \delta = \epsilon$$

次に微分不可能性を示す

$\forall \epsilon > 0$ とする $\delta = \epsilon$ とおくと

$\forall h > 0 (|h-0| < \delta)$ に対して

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - 1 \right| = \left| \frac{|h|}{h} - 1 \right| = \left| \frac{h}{h} - 1 \right| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$$

同様に

$\forall h < 0 (|h-0| < \delta)$ に対して

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} + 1 \right| = \left| \frac{|h|}{h} + 1 \right| = \left| -\frac{h}{h} + 1 \right| = |-1 + 1| = 0 < \epsilon$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1$$

よって $f(x)$ は $x=0$ における右微分係数と左微分係数が一致しないので

$f(x) = |x|$ は $x=0$ で微分不可能