数学基礎演習 2_A.4.3

AHA23005　板倉 洸基

prop.

$\mathbb{R}$ 上の関数$f(x)$と$a \in \mathbb{R}$ に関して、$f(x)$が$x = a$で微分可能であるとき、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} = f'(a) \cdots (*)$$

が成り立つことを示せ。また、$(*)$の左辺の極限値は存在するが、

$x = a$で微分可能でない関数$f(x)$の例を 1 つ挙げよ。

pf. $f(x)$は$x = a$で微分可能だから、

「$^\forall \varepsilon_1 > 0, {}^\exists \delta_1(\varepsilon_1) > 0\ s.t.\ {}^\forall h \in \mathbb{R}\big(0 < |h| < \delta_1(\varepsilon_1)\big), \left|\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right| < \varepsilon_1$」 $\cdots$①

ここで、$^\forall \varepsilon > 0$ をとり、$\varepsilon_1 \coloneqq \dfrac{1}{3}\varepsilon$とおくと、$\varepsilon_1 > 0$ より、①を適用できる。

よって、$\delta(\varepsilon) \coloneqq \dfrac{1}{2}\delta_1\left(\dfrac{1}{3}\varepsilon\right) > 0$ とおくと、$^\forall h \in \mathbb{R}\big(0 < |h| < \delta(\varepsilon)\big)$に対して、

$0 < |h| < \delta(\varepsilon) = \dfrac{1}{2}\delta_1\left(\dfrac{1}{3}\varepsilon\right) < \delta_1\left(\dfrac{1}{3}\varepsilon\right)$ だから、

$\left|\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right| < \dfrac{1}{3}\varepsilon$　が成り立つ。

また、$0 < |h| < |2h| < 2\delta(\varepsilon) = \delta_1\left(\dfrac{1}{3}\varepsilon\right)$ より、

$\left|\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h} - f'(a)\right| < \dfrac{1}{3}\varepsilon$　も同様に成り立つ。

よって、

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} - f'(a)\right| \\
&= \left|\frac{f(a+2h)-f(a)-f(a+h)+f(a)}{h} - f'(a)\right| \\
&= \left|\left\{2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} - 2f'(a)\right\} - \left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right\}\right| \\
&\le 2\left|\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} - f'(a)\right| + \left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right| \\
&< 2\cdot\frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

以上より、

「$^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists \delta(\varepsilon) > 0\ s.t.\ {}^\forall h \in \mathbb{R}\big(0 < |h| < \delta(\varepsilon)\big), \left|\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} - f'(a)\right| < \varepsilon$」

即ち、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} = f'(a)$が示された。■

次に、$(*)$の左辺の極限値は存在するが、

$x=a$で微分可能でない関数fの例を挙げる。

$f(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & (x=0) \\ 1 & (x \neq 0) \end{cases}$ とすると、

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ となるが、fは$x=0$ で微分可能でない。

以下にこれを示す。

pf.

${}^\forall\varepsilon>0$ をとり、$\delta \coloneqq \varepsilon$とおくと、${}^\forall h\in\mathbb{R}(0<|h|<\delta)$に対して、

$$\left|\frac{f(2h)-f(h)}{h}\right|=\left|\frac{1-1}{h}\right|=0<\varepsilon$$

即ち、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ となる。

一方、${}^\forall r>0$ をとり、$\delta(r) \coloneqq \dfrac{1}{r}$ とおくと、

${}^\forall h>0\big(0<|h|<\delta(r)\big)$に対して、$h>0$ より、$0<h<\delta(r)=\dfrac{1}{r}$ だから、

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{1}{h}>r$$

${}^\forall h<0\big(0<|h|<\delta(r)\big)$に対して、$h<0$ より、$0<-h<\delta(r)=\dfrac{1}{r}$ だから、

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{1}{h}<-r$$

以上より、$\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=+\infty,\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=-\infty$となるから、

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ は存在しない。即ち、fは$x=0$ で微分可能でない。■