

A 4.5

問) 関数 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上微分可能で、さらにその導関数 $f'(x)$ が $\mathbb{R}$ 上有界のとき、 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ。

解) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能であるから、
平均値の定理より

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} \text{ s.t. } f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y)$$

$f'(x)$ が $\mathbb{R}$ 上有界であるから、

$$\exists M > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq M$$

ここで $\forall \varepsilon > 0$ に対し、 $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$ と定めると、

$\delta > 0$ で ε のみに依存しているといえる。

よって、

$$\begin{aligned} |x - y| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(c) \cdot (x - y)| \\ &= |f'(c)| |x - y| \\ &< M \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

ゆえに $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上一様連続であることが示された。