

問 A.5.1 $p > 0$ とする。級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は、 $p < 1$ のとき発散し、 $p > 1$ のとき収束することを示せ。

解答) []はガウス記号とする。

(I) $p > 1$ のとき

$\forall x \in R (x > 0), x \leq [x] + 1$ が成り立つ。

$x > 0$ より両辺の逆数を取ると $(0 <) \frac{1}{[x]+1} \leq \frac{1}{x}$

ここで両辺を p 乗して $[1, n]$ で積分すると、

$$\int_1^n \frac{1}{([x]+1)^p} dx \leq \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \Rightarrow \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^p} \leq \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \text{となり、}$$

両辺に1足すと、 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$ となる。

したがって、左辺の収束を示すために右辺の収束を示す。

$$\int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{x^{p-1}} \right]_1^n = \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{n^{p-1}} - 1 \right)$$

ここで、 $\forall n \in N$ に対して、 $0 < \frac{1}{n^p} \leq 1$ が成り立ち、 $\frac{1}{1-p} < 0$ から $\frac{1}{1-p} \leq \frac{1}{n^{p-1}(1-p)} < 0$

ここで全体に $\frac{1}{p-1}$ を足すと $0 \leq \frac{1}{n^{p-1}(1-p)} + \frac{1}{p-1} < \frac{1}{p-1}$

すなわち $0 \leq \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{n^{p-1}} - 1 \right) < \frac{1}{p-1}$ となるので $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$ は有界。

したがって $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は有限値に収束する。

(II) $0 < p \leq 1$ のとき

$\forall x \in R (x \geq 1), [x] \leq x$ が成り立つ。

$x \geq 1$ より両辺の逆数を取ると $(0 <) \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]}$

ここで両辺を p 乗して $[1, n + 1]$ で積分すると

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{[x]^p} dx \Rightarrow \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \text{となる。}$$

したがって、右辺の発散を示すために左辺の発散を示す。

(1) $p = 1$ のとき

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1)$$

$\forall K > 0$ をとる。 N_1 を $N_1 > e^K - 1$ を満たす最初の自然数としてとる。

$\forall n \in N \text{ s.t. } n \geq N_1$ に対して、 $(0 <) e^K - 1 < N_1 \leq n$ 全体に 1 を足すと $e^K < N_1 + 1 \leq n + 1$

ここで全体の自然対数を取ると $(K =) \log e^K \leq \log(N_1 + 1) < \log(n + 1)$

より、 $K < \log(n + 1)$ が言えたので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n + 1)$ は発散。

すなわち、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は発散。

(2) $p < 1$ のとき

$\forall K' > 0$ をとる。 N_2 を $N_2 > K'^{\frac{1}{1-p}} - 1$ を満たす最初の自然数としてとる。

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{(n+1)^{p-1}} - 1 \right)$$

$\forall n \in N \text{ s.t. } n \geq N_2$ に対して、 $K'^{\frac{1}{1-p}} - 1 < N_2 \leq n$ 全体に 1 足して $(0 <) K'^{\frac{1}{1-p}} < N_2 + 1 \leq n + 1$

全体を $1 - p$ 乗すると $K' < (n + 1)^{1-p} = \frac{1}{(n+1)^{p-1}}$

となるので $\frac{1}{1-p} > 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx$ は正の無限大に発散。

したがって、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ も正の無限大に発散。

(I),(II)より命題は満たされた■