A-5-11 AHA23014 稲垣秀梢

問. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径がRのとき.

$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径がRであることを示せ.

また. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ は収束するが.

$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n R^{n-1}$ は発散する例を挙げよ.

答.
準備として以下を示しておく.

① $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$ $(n \to \infty)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき.

$a_n b_n \to \alpha\beta$ $(n \to \infty)$

∵ $\beta \neq \pm\infty$ のとき.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon$ s.t. $\forall n > N$ $\begin{cases} |a_n - \alpha| < \varepsilon \\ \text{and} \\ |b_n - \beta| < \varepsilon \end{cases}$

となる.
いま $\varepsilon' > 0$ を任意にとると. 上の $\varepsilon = \mathrm{Min}\{1, \dfrac{\varepsilon'}{1+|\alpha|+|\beta|}\}$

として上の N_ε がとれる. このとき. $\forall n > N_\varepsilon$ に対し.

$|a_n b_n - \alpha\beta| = |(a_n - \alpha)(b_n - \beta) + \alpha(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)|$

$\leq |a_n-\alpha|\cdot|b_n-\beta|+|\alpha||b_n-\beta|+|\beta||a_n-\alpha|$

$< \varepsilon^2+|\alpha|\varepsilon+|\beta|\varepsilon$

$= \varepsilon(\varepsilon+|\alpha|+|\beta|)$

$< \varepsilon(1+|\alpha|+|\beta|)$

$\leq \varepsilon'$

よって $\forall\varepsilon'>0\ \exists N,\ \forall n>N\quad |a_nb_n-\alpha\beta|<\varepsilon'$ より、

$a_nb_n\to\alpha\beta\ (n\to\infty)$ 図

$\beta=\infty$ or $-\infty$ のとき.

$\alpha>0,\beta=\infty$ としても一般性を失わない.

このとき. $\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon>0$, s.t. $\forall n>N_\varepsilon$, $|a_n-\alpha|<\varepsilon$

かつ $\forall L>0\ \exists N_L'>0$, s.t. $\forall n>N_L'$, $b_n>L$

が成り立つ. このとき $a_nb_n\to\infty$ を示す

$\varepsilon=\frac{\alpha}{2}>0$ とすると. 上の $N_\varepsilon>0$ がとれて. $\forall n>N_\varepsilon$ に対し.

$|a_n-\alpha|<\frac{\alpha}{2}\quad\therefore\ a_n-\alpha>-\frac{\alpha}{2}$ となる.

いま任意に $L>0$ をとる. $L'=\frac{2}{\alpha}L>0$ とすると.

上の $N_{L'}'>0$ がとれて、$N=\mathrm{Max}\{N_\varepsilon,N_{L'}'\}$ とすると.

任意の$n>N$に対し.

$a_nb_n \geq (a_n-\alpha+\alpha)b_n \geq (a_n-\alpha)b_n+\alpha b_n$

$\geq -\frac{\alpha}{2}b_n+\alpha b_n \geq \frac{\alpha}{2}b_n > \frac{\alpha}{2}L' \geq L$

より. $\forall L>0\ \exists N>0\ \forall n>N\quad a_nb_n>L$となるから.

$a_nb_n \to \infty\ (n\to\infty)$である 図

② (はみうちの原理)

$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$に対し常に

$a_n \leq b_n \leq c_n$が成り立つとする.

このとき. (i) $a_n\to\infty$ならば $b_n\to\infty$

(ii) $c_n\to-\infty$ならば $b_n\to-\infty$

(iii) $a_n\to\alpha,\ c_n\to\alpha\quad(\alpha\in\mathbb{R})$ならば

b_nは収束し. $b_n\to\alpha$

∵ (i) $a_n\to\infty$のとき.

$\forall L>0\ \exists N_L>0, \forall n>N_L\quad a_n>L$

となるが. いま $b_n\geq a_n$より

$\forall L>0\ \exists N_L>0, \forall n>N_L\quad b_n>L$

よって $b_n \to \infty$ 図

(ii) $b_n \leq c_n$ より $-c_n \leq -b_n$.

このとき、(i)と同様に示せる.

(iii) $a_n \to \alpha$, $c_n \to \alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall n > N_\varepsilon$, $\begin{cases} |a_n - \alpha| < \varepsilon \\ \text{かつ} \\ |c_n - \alpha| < \varepsilon \end{cases}$

が成り立つ. いまεを任意にとると.

上の $N_\varepsilon > 0$ がとれ $\forall n > N_\varepsilon$ に対して.

$|a_n - \alpha| < \varepsilon$, $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つから.

このとき. $-\varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon$, $-\varepsilon < c_n - \alpha < \varepsilon$

となるから, $-\varepsilon < a_n - \alpha \leq b_n - \alpha \leq c_n - \alpha < \varepsilon$

$\therefore$ $|b_n - \alpha| < \varepsilon$ となる.

$\therefore$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall n > N_\varepsilon$, $|b_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つから.

$b_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ 図

③ $\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n\to\infty)$ を示す.

まず. $x^{\frac{1}{n}}$ は $x>0$ で単調増加するから.

$n\in\mathbb{N}_{>0}$ のとき. $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1$

$a_n = \sqrt[n]{n} - 1$ とおくと. $a_n \geq 0$.

このとき. $a_n + 1 = \sqrt[n]{n}$

$$\therefore (a_n+1)^n = n.$$

$n\geq 3$ とするとき.

$$(\text{左辺}) = \underbrace{1+na_n}_{\oplus} + {}_nC_2 a_n^2 \underbrace{+\cdots+a_n^n}_{\oplus}$$

$$\geq {}_nC_2 a_n^2$$

$$\therefore \ n \geq {}_nC_2 a_n^2 = \frac{n(n+1)}{2} a_n^2$$

$$\therefore \ \frac{2}{n+1} \geq a_n^2 \geq 0$$

ここで. $\sqrt{\frac{2}{n+1}} \longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$ である.

$\because$ $\forall\varepsilon>0$ に対し. $\mathbb{R}$ のアルキメデス性から

$\frac{2}{\varepsilon^2} - 1 < N$ なる N が存在する. よって.

任意の $n>N$ に対して.

$$\frac{2}{n+1} < \frac{2}{N+1} < 2\cdot\frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \quad \therefore \sqrt{\frac{2}{n+1}} < \varepsilon$$

$$\therefore \sqrt{\frac{2}{n+1}} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$ □

$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n+1}}$ かつ $\sqrt{\frac{2}{n+1}} \longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$ より

はさみうちの原理から. $a_n \longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$

つまり $\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall n>N,\ |\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$

が成り立つがこれは $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ $(n\to\infty)$ を示している

□

さて. 本題を示す.

まず. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R $(0\leq R\leq\infty)$ とする.

このとき. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ である.

つまり. $\sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|} \longrightarrow \frac{1}{R}$ $(n\to\infty)$

このとき $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径が R であることを示す.

まず、任意の$x\in\mathbb{R}$と$N\in\mathbb{N}$に対して、

$$x\sum_{n=1}^{N} na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{N} na_nx^n$$

xはNに対して定数だから、①より、実数xに対して、

$\sum_{n=1}^{N} na_nx^{n-1}$が収束することと

$\sum_{n=1}^{N} na_nx^n$が収束することは同値。

よって$\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$と$\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^n$の収束半径は一致する。

補題として以下を示す。

$A, B\subset\mathbb{R}_{\geq 0}$として、$AB=\{ab \mid a\in A, b\in B\}$とするとき、

A, Bが空でない有界な集合のとき

$$\sup A\sup B=\sup AB$$

(ABが空でない有界集合で、A, B, ABに上限が存在することは認める)

$\because$ $\alpha=\sup A$, $\beta=\sup B$, $\gamma=\sup AB$とする。

$c\in AB$とすると、$\exists a\in A, b\in B$があり$c=ab$となる。

$0\leq a\leq\alpha$, $0\leq b\leq\beta$より$c=ab\leq\alpha\beta$。よって$\alpha\beta$はABの上界

$\therefore\gamma\leq\alpha\beta$.

$\gamma < \alpha\beta$とすると、$\frac{\gamma}{\beta} < \alpha$。よってある$a \in A$があって、$\frac{\gamma}{\beta} < a < \alpha$

をみたす。よって、$\frac{\gamma}{a} < \beta$　$(\because a > 0, \beta > 0)$

ゆえにある$b \in B$があって$\frac{\gamma}{a} < b < \beta$をみたす。

よって　$\gamma < ab$　$(\because a > 0)$　となるが、これはγがABの

上限であることに矛盾。よって$\gamma = \alpha\beta$。 $\boxtimes$

系．$\{a_n\}$，$\{b_n\}$に対し、

$$\sup_{k \geq n} |a_k| \sup_{k \geq n} |b_k| = \sup_{k \geq n} |a_k| \cdot |b_k|$$

補題2

任意の数列$\{a_n\}$に対し、

$\{a_n\}$が収束 $\Leftrightarrow$ $\limsup a_n = \liminf a_n$

また、　$\{a_n\}$：収束 $\Rightarrow$ a_nの収束値は

$\limsup a_n$と等しい。

(:-) $\Leftarrow$ $\limsup a_n = \liminf a_n = \alpha \in \mathbb{R}$のとき。

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon>0,\ \forall n>N_\varepsilon \begin{cases} \left|\sup_{k\geq n} a_k-\alpha\right|<\varepsilon \\ \text{かつ} \\ \left|\inf_{k\geq n} a_k-\alpha\right|<\varepsilon \end{cases}$

よって、
$\forall \varepsilon>0$ に対し、上の $N_\varepsilon>0$ をとると、
$\forall n>N_\varepsilon$ に対し、

$$-\varepsilon<\inf_{k\geq n} a_k-\alpha \leq a_n-\alpha \leq \sup_{k\geq n} a_n-\alpha<\varepsilon$$

$$\left(\because \inf_{k\geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k\geq n} a_k\right)$$

$$\therefore |a_n-\alpha|<\varepsilon.$$

$\therefore \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon>0,\ \forall n>N_\varepsilon,\ |a_n-\alpha|<\varepsilon$
$\therefore a_n \to \alpha \quad (n\to\infty)$

つまり a_n は収束して $\lim_{n\to\infty} a_n=\limsup a_n=\liminf a_n$

$\Rightarrow$ $a_n\to\alpha \quad (n\to\infty)$ $\alpha\in\mathbb{R}$ のとき、

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon>0\ \forall n>N_\varepsilon\ |a_n-\alpha|<\varepsilon$ となる。

このとき $|a_n-\alpha|<\varepsilon \iff \alpha-\varepsilon<a_n<\alpha+\varepsilon$

$$\iff a_n\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$$

いま任意に$\varepsilon>0$をとり．上の$N_\varepsilon>0$をとる．

このとき．$\{a_n\}_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \subset (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$．

ゆえに．$\forall n > N_\varepsilon$をとると．

$\{a_k\}_{k=n}^{\infty} \subset (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ より

$\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon$ は$\{a_n\}_{k=n}^{\infty}$の下界と上界．

よって．$\alpha-\varepsilon \leq \inf\limits_{k\geq n} a_k \leq \sup\limits_{k\geq n} a_k \leq \alpha+\varepsilon$

よって $\begin{cases} \left|\inf\limits_{k\geq n} a_k - \alpha\right| < \varepsilon \\ \text{かつ} \\ \left|\sup\limits_{k\geq n} a_k - \alpha\right| < \varepsilon \end{cases}$

$\therefore \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon>0,\ \forall n>N_\varepsilon \begin{cases} \left|\sup\limits_{k\geq n} a_k - \alpha\right| < \varepsilon \\ \text{かつ} \\ \left|\inf\limits_{k\geq n} a_k - \alpha\right| < \varepsilon \end{cases}$

よって．$\limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$

つまり 上極限と下極限はa_nの極限に一致する

図

③より. $\sqrt[n]{n} \to 1$. $\therefore \limsup \sqrt[n]{n} = 1$ $\cdots$ (＊)

以下 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ の収束半径について考える.

補題より、

$$\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|k a_k|} = \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{k} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|a_k|}$$

(＊)より $\lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{k} = 1$

仮定より $\lim_{n \to \infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} = R$

準備①より. $\lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{|k a_k|} = R$

よって $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ の収束半径は R

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径は R 図

(後半の主張はこれらから直ちに従う)

$a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ とする. このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} x^n$ の

収束半径は1である.

証

補題3 $a_n \to a \ (n\to\infty)$ $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

のとき. $\dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{a} \ (n\to\infty)$.

∵ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon > 0 \ \forall n > N, \ |a_n - a| < \varepsilon$.

は成り立つ.

$\forall \varepsilon > 0$ を与える. このとき. $\delta = \min\left\{\dfrac{|a|}{2}, \dfrac{|a|^2}{2}\varepsilon\right\}$

→ とすると $\delta > 0$ で上の N_δ をとると $\forall n > N_\delta$ に対し.

$|a_n - a| < \delta$ より.

$\left||a_n| - |a|\right| \leqq |a_n - a| < \dfrac{|a|}{2}$

$-\dfrac{|a|}{2} < |a_n| - |a| < \dfrac{|a|}{2}$

$\therefore \ |a_n| > \dfrac{|a|}{2}$

よって

$$\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{|a_n||a|} < \frac{|a_n-a|}{|a|^2/2} \leq \varepsilon$$

$\therefore \frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$ 図

補題4

$a_n \to a \ (n\to\infty)$ $a>0$ とする.

$\sqrt{a_n} \to \sqrt{a} \ (n\to\infty)$.

(:) $\forall \varepsilon>0.\ \exists N_\varepsilon>0.\ \forall n>0.\ |a_n-a|<\varepsilon$

は成り立っている.

いま $\forall\varepsilon>0$ をとるとき. $\delta=\varepsilon\sqrt{a}$ とすると.

$\delta>0$ より上の N_δ がとれて. $\forall n>N_\delta$ に対して.

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right| = \frac{|a_n-a|}{|\sqrt{a_n}+\sqrt{a}|} \leq \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

$\therefore \forall\varepsilon>0.\ \exists N>0.\ \forall n>0\ \left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right|<\varepsilon$

$\therefore \sqrt{a_n} \to \sqrt{a} \ (n\to\infty)$ 図

系 $a_n \to \alpha \ (n\to\infty)$ $\alpha > 0$ のとき.

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}} \to \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ (n\to\infty).$$

これと. ①より

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) \to \frac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}$$

再び①より

$$a_n^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) \to \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} = (\alpha)^{-\frac{3}{2}} \quad \cdots (**)$$

③より $n^{\frac{1}{n}} \to 1 \ (n\to\infty)$ より

$(**)$ の a_n を $n^{\frac{1}{n}}$ とすると.

$$\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{-\frac{3}{2}} \to 1^{-\frac{3}{2}} = 1$$

$$\therefore \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\sqrt{n}}\right|} \to 1 \quad (n\to\infty)$$

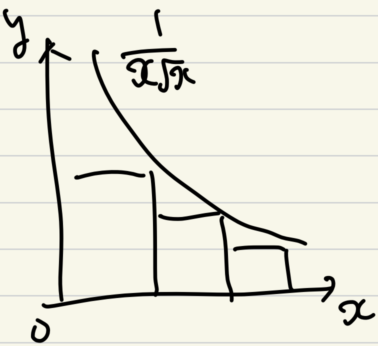
補題2より. $\limsup \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\sqrt{n}}\right|} = 1$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} x^n$ の収束半径は 1

次に (I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ が収束すること

(II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ が $+\infty$ に発散することを示す.

証 (I): $$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\sqrt{n}} \le 1+\int_{1}^{N}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$$



$$\le 1+\left[-2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right]_{1}^{N}$$

$$= 1+2\left(-\frac{1}{\sqrt{N}}+1\right)$$

$$\le 3$$

有界単調収束定理より.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ は収束する.

(II) $$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \ge \int_{1}^{N+1}\frac{dx}{x} = \log(N+1)$$

$\forall L\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall k>N\ \log(k+1)>L$ より

$\forall L\in\mathbb{R}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall k>N\ \displaystyle\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{n}}>L$ ∎