

A.5.2

<問題>

正項級数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ が収束するとき、 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ も収束することを示せ。

<解答>

正項級数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ が収束するとき、部分和の列 $\{S_n\}$ は有界であり、

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 0 + 0 + \dots + 0 = 0$ であるから、 $\forall n \in N, \exists M \geq 0, 0 \leq S_n \leq M$

このとき、任意の $n \in N$ に対して、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n) \\ &\leq S_n^2 [a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n \geq 0] \\ &\leq M^2 [0 \leq S_n \leq M] \end{aligned}$$

よって、 $\sum_{k=1}^n a_k^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0 + 0 + \dots + 0 = 0$ より、 $0 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \leq M^2$

したがって、 $\sum_{k=1}^n a_k^2 = S_n'$ とすると、 S_n' は $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ の部分和であり、 $\{S_n'\}$ は有界、

かつ $S_{n+1}' = S_n' + a_{n+1}^2 \geq S_n'$ より、 $\{S_n'\}$ は単調増加数列であるから、有界単調数列収束定理よ

り、 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ は収束する。