数学基礎演習 A5.4

問題 $\{a_n\}$ を実数列とする $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$ $a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) とおく

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^- = 0$ のとき

任意の実数 p に対して $\{a_n\}$ を適当に並べ替えてできる実数列 $\{b_n\}$ でその級数の和について

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = p$ が成り立つことを示す

証明) $s = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ に対して, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく

仮定より $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$ $a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^- = 0$

a_n に対して $a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ である

この記号を用いて $s_n^+ = \sum_{k=1}^n a_k^+$, $s_n^- = \sum_{k=1}^n a_k^-$ とおけば $s_n = s_n^+ - s_n^-$

したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^+ = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^- = \infty$

p を任意の実数とする $p > 0$ とする

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^+ = \infty$ だからある番号 n が存在して $s_n^+ \geq p$ となる

そのような n で最小のものを i_1 とすると $p \leq a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_{i_1}^+$

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^- = \infty$ だからある番号 n が存在して $s_n^- \geq s_{i_1}^- - p$ となる

そのような n で最小のものを j_1 とすると $a_1^+ + \dots + a_{i_1}^+ - p \leq a_1^- + \dots + a_{j_1}^-$

すなわち $a_1^+ + \dots + a_{i_1}^+ - a_1^- - \dots - a_{j_1}^- \leq p$

同様にして $a_1^+ + \dots + a_{i_1}^+ - a_1^- - \dots - a_{j_1}^- + a_{i_1+1}^+ + \dots + a_n^+ \geq p$

となる最小の $n > i_1$ を i_2 として

$a_1^+ + \dots + a_{i_1}^+ - a_1^- - \dots - a_{j_1}^- + a_{i_1+1}^+ + \dots + a_{i_2}^+ - a_{j_1+1}^- - \dots - a_n^- \leq p$

となる最小の $n > j_1$ を j_2 とする この操作を繰り返していけば 1 つの級数

(*) $a_1^+ + \dots + a_{i_1}^+ - a_1^- - \dots - a_{j_1}^- + a_{i_1+1}^+ + \dots + a_{i_2}^+ - a_{j_1+1}^- - \dots - a_{j_2}^- + \dots$

が得られる

ただし $a_n \geq 0$ の時は a_n^- は項と見なさず $a_n < 0$ の時は a_n^+ は項とみなさないものとする

この級数の第 n 項を b_n とする $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ の各項 a_n は $a_n > 0$ ならば a_n^+ , $a_n < 0$ ならば $-a_n^-$ とし

て (*) に必ず含まれる したがって $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ は $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ の項の順序を入れ替えた級数である

$s_n' = b_1 + \dots + b_n$ とする

もし $p < s_n'$ なら $b_1, \dots, b_n$ に含まれる最後の正の項を b_m ($m \leq n$) とするとき 上の定め方

より $s_{m-1}' < p < s_m' = s_{m-1}' + b_m$, $p < s_n' \leq \dots \leq s_m'$

となっているから $|p - s_n'| < s_n' - p < b_m = |b_m|$ である

一方、もし $s_n' < p$ なら $b_1, \dots, b_n$ に含まれる最後の負の項を b_m ($m \leq n$) とするとき 上の

定め方より $s_{m-1}' + b_m = s_m' < p < s_{m-1}'$, $s_m' \leq \dots \leq s_n' < p$

となっているから $|p - s_n'| < p - s_n' < -b_m = |b_m|$ である

いずれの場合も $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ が絶対収束していないことから n を大きくとれば m も大きくなり

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ だから $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ となる

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n' - p| = 0$ すなわち $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = p$