

A 5.5 $f_n(x) = \sin \frac{1}{nx}$ $x \in (0, +\infty)$

(c) 任意に $\varepsilon > 0$, $x \in I$ とする. テルキメデス原理に於て

$$\frac{1}{\varepsilon} \leq Nx$$

とある $N \in \mathbb{N}$ が存在する.

$f(x) = 0$ とする. $\forall N$ に於て, $n \geq N$ とする

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sin \frac{1}{nx} - 0 \right| \\ &= \left| \sin \frac{1}{nx} \right| \\ &\leq \frac{1}{nx} \\ &\leq \frac{1}{N\varepsilon} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

よって $\{f_n\}$ は $n \rightarrow +\infty$ として I 上 $f(x)$ に各点収束する

ここで $\varepsilon = \frac{1}{2}$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に於て, $x = \frac{2}{\pi n}$ とする.

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \sin \frac{1}{n \cdot \frac{2}{\pi n}} - 0 \right| \\ &= \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 1 \geq \varepsilon \end{aligned}$$

よって, $\{f_n\}$ は $n \rightarrow +\infty$ として I 上一様収束ではない.