AHA23038
田村 一路

A.5.7

問

fを$\mathbb{R}$上の連続関数とし、$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = f\left(x - \frac{1}{n}\right)$とする。$f$が$\mathbb{R}$上一様連続ならば、関数列$(f_n)$は$f$に$\mathbb{R}$上一様収束することを示せ。また$f$が$\mathbb{R}$上一様連続でなく、$(f_n)$が$f$に$\mathbb{R}$上一様収束しない例を一つ挙げよ。

証明
[示すこと: fが$\mathbb{R}$上一様連続ならば(f_n)はfに$\mathbb{R}$上一 様収束する]
| fは$\mathbb{R}$上一様連続とする
| [示すこと: (f_n)はfに$\mathbb{R}$上一 様収束する
i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0: \forall z \in \mathbb{R}, \forall n > N, |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$]
| | $\forall \varepsilon > 0$をとる
| | fは一様連続だから$\exists \delta > 0: \forall x, y \in \mathbb{R}(|x - y| < \delta), |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
| | $N = \frac{1}{\delta}$とおく
| | $\delta > 0$だから$N > 0$である
| | $\forall z \in \mathbb{R}, \forall n > N$をとる
| | $|f_n(z) - f(z)| = \left|f\left(z - \frac{1}{n}\right) - f(z)\right|$
| | $x = z, y = z - \frac{1}{n}$とおくと
| | $|x - y| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \delta$
| | よって$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
| | ゆえに$\left|f\left(z - \frac{1}{n}\right) - f(z)\right| = |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$
| | よって(f_n)はfに$\mathbb{R}$上一 様収束する

fが$\mathbb{R}$上一様連続でなく、(f_n)がfに$\mathbb{R}$上一様収束しない例
$f(x) = x^2$とおく
fは$\mathbb{R}$上連続である

[示すこと:fは一様連続でない i.e. $\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0, \exists x, y \in \mathbb{R}(|x - y| < \delta) : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$]
| $\varepsilon = 1$とおく
| $\forall\delta > 0$をとる
| $x = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta}, y = \frac{1}{\delta}$とおくと$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$
| $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| = \frac{\delta}{2}\left(\frac{\delta}{2} + \frac{2}{\delta}\right) = \frac{\delta^2}{4} + 1 \geq \varepsilon$
| よってfは$\mathbb{R}$上一様連続でない

[示すこと:(f_n)はfに$\mathbb{R}$上一様収束しない
i.e. $\exists\varepsilon > 0 : \forall N > 0, \exists x \in \mathbb{R} : \exists n > N : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$]
| $\varepsilon = 2$とおく
| $\forall N > 0$をとる
| $x = -N - 1$とおく
| $n = N + 1$とおく
| $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}x\right| = \left|\frac{1}{(N+1)^2} + 2\right| \geq \varepsilon$
| よって(f_n)は$\mathbb{R}$上fに一様収束しない