

1 問 B.1.1  $V, W$  は  $R^n$  の部分ベクトル空間とする。

$V + W = \{v + w | v \in V, w \in W\}$  もまた  $R^n$  の部分ベクトル空間であることを示せ。

2 答

[1]  $V, W$  は  $R^n$  の部分空間なので  $0 \in V, 0 \in W$  より  $0 = 0 + 0 \in V + W$  となり成立

[2]  $\forall x \in V + W$  に対し、 $\exists p \in V, \exists q \in W$  s.t.  $x = p + q$  が成り立つ

そこで  $\forall x, y \in V + W$  をとると、 $\exists p, r \in V, \exists q, s \in W$  s.t.  $x = p + q, y = r + s$  したがって  $x + y = p + q + r + s$

また、 $p, q, r, s$  はベクトルなので加法について可換でかつ結合的なので  $(p + q) + (r + s) = (p + r) + (q + s)$  が成り立つ。

よって  $p + r \in V, q + s \in W$  より  $x + y = (p + r) + (q + s) \in V + W$  となり成立

[3]  $\forall z \in V + W, \forall a \in R$  をとる。

[2] と同様に  $\exists v \in V, \exists w \in W$  s.t.  $z = v + w$  ここで  $az = a(v + w)$ , 分配法則により  $a(v + w) = av + aw$   
 $av \in V, aw \in W$  より、 $az = av + aw \in V + W$  となり成立

したがって、[1],[2],[3] により  $V + W$  は  $R^n$  の部分空間である