数学基礎演習 2_B.1.3

AHA23005　板倉 洸基

prop. $V, W, V \cup W$が$\mathbb{R}^n$の部分ベクトル空間ならば、$V \subset W$又は$V \supset W$。

pf. $V, W, V \cup W$: $\mathbb{R}^n$の部分ベクトル空間とする。

$$\left[\begin{array}{l} \text{示すこと}: (V \subset W) \lor (V \supset W) \\ \quad i.e. \neg\{(V \not\subset W) \land (V \not\supset W)\} \end{array}\right]$$

$(V \not\subset W) \land (V \not\supset W)$と仮定すると、

$\exists v \in V \cap W^c, \exists w \in V^c \cap W$

よって $v, w \in V \cup W$であり、

条件より$V \cup W$はベクトル空間だから、

$v + w \in V \cup W$　…①

ここで、$v + w \in V$と仮定する。

今 $v \in V$であり、条件よりVはベクトル空間だから、$-v \in V$

よって$-v, v + w \in V$であり、Vはベクトル空間だから、

$w = (-v) + (v + w) \in V$となるが、

これは $w \in V^c \cap W$に反する。

よって、$v + w \notin V$　…②

同様に、$v + w \notin W$　…③

②,③より、$v + w \notin V \cup W$となるが、

これは①に矛盾する。

以上より$\neg\big((V \not\subset W) \land (V \not\supset W)\big)$は示された。

即ち、$V \subset W$又は$V \supset W$は成り立つ。■