

数学基礎演習2 問 B.1.4

(1) $Sym_n(\mathbb{R})$ が $M_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示す

[1] ${}^tO = O$ より, $O \in Sym_n(\mathbb{R})$

[2] $A, B \in Sym_n(\mathbb{R})$ とすると

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) &= {}^tA + {}^tB \\ &= A + B \end{aligned}$$

よって, $A+B \in Sym_n(\mathbb{R})$

[3] $A \in Sym_n(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$ とすると

$$\begin{aligned} {}^t(cA) &= c {}^tA \\ &= cA \end{aligned}$$

よって, $cA \in Sym_n(\mathbb{R})$

以上より, $Sym_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間である \square

(2) $Alt_n(\mathbb{R})$ が $M_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示す

[1] ${}^tO = -O$ より, $O \in Alt_n(\mathbb{R})$

[2] $A, B \in Alt_n(\mathbb{R})$ とすると

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) &= {}^tA + {}^tB \\ &= -A - B \\ &= -(A+B) \end{aligned}$$

よって, $A+B \in Alt_n(\mathbb{R})$

[3] $A \in Alt_n(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$ とすると

$$\begin{aligned} {}^t(cA) &= c {}^tA \\ &= c(-A) \\ &= -(cA) \end{aligned}$$

よって, $cA \in Alt_n(\mathbb{R})$

以上より, $Alt_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間である \square