

1-5

AHA22006 三井優招

proof

① ゼロ元の存在

全ての成分が0であるゼロ行列  $O$  は明らかに  $\text{tr} O = 0$  なので

$O \in M_n(\mathbb{R})$ . 従って  $M_n(\mathbb{R})$  にゼロ元は存在する.

② (i) 和について閉じていること

$M_n(\mathbb{R})$  から任意に2つの行列  $A, B$  を取る.

また,  $A, B$  の第  $i, j$  成分 ( $i, j \in N$   $1 \leq i, j \leq n$ ) をそれぞれ  $a_{ij}, b_{ij}$  と書く.

$$\begin{aligned}\text{tr}(A+B) &= \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} \\ &= \text{tr} A + \text{tr} B\end{aligned}$$

$$= 0 \quad (\because A, B \in M_n(\mathbb{R}))$$

よって  $(A+B) \in M_n(\mathbb{R})$

従って  $M_n(\mathbb{R})$  は和について閉じている

(ii) スカラー倍について閉じていること

任意に実数  $\alpha$  をとる.

$$\begin{aligned}\text{tr}(\alpha A) &= \sum_{i=1}^n \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} \\ &= \alpha \text{tr} A\end{aligned}$$

$$= 0$$

よって  $(\alpha A) \in M_n(\mathbb{R})$

従って  $M_n(\mathbb{R})$  はスカラー倍について閉じている.

以上より  $M_n(\mathbb{R})$  は  $M_n(\mathbb{R})$  の部分空間.