

# 問B.1.7

$t$ に関する $n$ 次以下の多項式全体の集合を  $R[t]_n$  とする.

$R[t]_n$  は単項式や定数関数も含むものとする.

$R[t]_n$  は多項式の通常の加法とスカラー倍によりベクトル空間となる.

$$X := \{f \in R[t]_n \mid f(0) = 1\}$$

は  $R[t]_n$  の部分ベクトル空間でないことを示す.

一方、この  $X$  に 通常とは異なる加法とスカラー倍を定義すれば

部分ベクトル空間とすることが可能である

一例をあげよ.

まず、 $X$  は  $R[t]_n$  の部分ベクトル空間でないことを示す.

$f_0 \in$  多項式としての  $0$  とする

このとき、 $f_0$  は定数関数であり、

$$f_0(0) = 0 \neq 1 \quad \text{より} \quad f_0 \notin X \quad (\because X := \{f \in R[t]_n \mid f(0) = 1\})$$

よって、 $X$  は  $R[t]_n$  の部分ベクトル空間ではないことが示された

次に、 $X$  に 通常とは異なる加法・スカラー倍を定義することで

ベクトル空間とすることを考える.

$$(i) \quad f_g(x) := \left( \forall x \in \mathbb{R} \right) \text{ により } f_0 \in \mathbb{R}_d[t] \quad \text{と定義する.}$$

$$(ii) \quad H, I \in X \quad \text{とするとき}$$

$$H(0) = 1, I(0) = 1 \quad (\because X := \{f \in R[t]_n \mid f(0) = 1\})$$

より、

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{k=1}^n (h_k x^k) + f_0(t) \\ I(t) &= \sum_{k=1}^n (i_k x^k) + f_0(t) \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} 1 \leq k \leq n \text{ まで } h_k \in \mathbb{R} \\ i_k \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

と表せる. このとき、

$$(H+I)(t) := \sum_{k=1}^n \{(h_k + i_k) \cdot t^k\} + f_0(t) \quad \text{と定義する}$$

次に  $\alpha \in \mathbb{R}$  と

補題

(iii)  $J \in X$ ,  $C \in \mathbb{R}$  とする.

$$J(0) = 1$$

より,

$$J(t) = \sum_{k=1}^n (j_k \times t^k) + f_0 \quad (1 \leq k \leq n \text{ で } j_k \in \mathbb{R})$$

を表す. 2つを.

$$(CJ)_{(0)} = \sum_{k=1}^n (C \times j_k \times t^k) + f_0(t)$$

と定義する

(i) の定義より,

$$f_0(0) = 1 \text{ より, } f_0 \in X \text{ とする.}$$

集合  $X$  は少なくとも2つの元をもつ.

(ii) の定義より,

$\forall H, I \in X$  とする.

$$(H+I)(t) = \sum_{k=1}^n \{(h_k + i_k) \times t^k\} + f_0(t)$$

$$\text{より, } (H+I)(0) = f_0(0) = 0$$

したがって,  $H+I \in X$

(iii) の定義より,

$J \in X$ ,  $C \in \mathbb{R}$  とする.

$$(CJ)_{(0)} = \sum_{k=1}^n (C \times j_k \times t^k) + f_0$$

$$\text{より, } (CJ)_{(0)} = 0 \text{ したがって } CJ \in X$$

2. 命題 (i) ~ (iii) の部分定義において,

$X$  がベクトル空間の条件を満たしていることを確認する.

$\forall H, I, J \in X, \forall a, b \in \mathbb{R}$  とする.

$$H(0) = 0, I(0) = 0, J(0) = 0 \text{ である.}$$

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{k=1}^n (h_k \times t^k) + f_0(t) \\ I(t) &= \sum_{k=1}^n (i_k \times t^k) + f_0(t) \\ J(t) &= \sum_{k=1}^n (j_k \times t^k) + f_0(t) \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} h_k \in \mathbb{R} \\ 1 \leq k \leq n \text{ かつ } i_k \in \mathbb{R} \\ j_k \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

と表せる.

$$\begin{aligned} (iv) (H+I)(t) + J(t) &= \sum_{k=1}^n \{ (h_k + i_k) \times t^k \} + f_0(t) + \sum_{k=1}^n (j_k \times t^k) + f_0(t) \\ &= \sum_{k=1}^n (h_k \times t^k) + f_0(t) + \sum_{k=1}^n (i_k + j_k) \times t^k + f_0(t) = H(t) + (I+J)(t) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } (H+I) + J = H + (I+J)$$

$$\begin{aligned} (v) (H+I)(t) &= \sum_{k=1}^n \{ (h_k + i_k) \times t^k \} + f_0(t) \\ &= \sum_{k=1}^n \{ (i_k + h_k) \times t^k \} + f_0(t) = (I+H)(t) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } H+I = I+H$$

$$(vi) (H+f_0)(t) = \sum_{k=1}^n \{ (h_k + 0) \times t^k \} + f_0(t) = \sum_{k=1}^n \{ (0 + h_k) \times t^k \} + f_0(t) = \sum_{k=1}^n (h_k \times t^k) + f_0(t) = H$$

$$\text{よって, } H+f_0 = f_0+H = H$$

(vii)  $H$  に反対して,  $(-H)$  は,

$$(-H)(t) = \sum_{k=1}^n (-h_k \times t^k) + f_0(t) \text{ であるので,}$$

$$(H+(-H))(t) = \sum_{k=1}^n \{ (h_k - h_k) \times t^k \} + f_0(t) = \sum_{k=1}^n \{ (-h_k + h_k) \times t^k \} + f_0(t) = f_0(t)$$

よって,

$$H+(-H) = (-H)+H = f_0 \text{ である.}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad ((a+b)H)_{(t)} &= \sum_{k=1}^n \{ (a+b) h_k \cdot t^k \} + f_0(t) \\
 &= \sum_{k=1}^n \{ a h_k \cdot t^k \} + f_0(t) + \sum_{k=1}^n \{ b h_k \cdot t^k \} + f_0(t) = (aH)_{(t)} + (bH)_{(t)}
 \end{aligned}$$

$$\text{よ} \cdot (a+b)H = aH + bH$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad (a(H+I))_{(t)} &= \sum_{k=1}^n \{ a(h_k + i_k) \cdot t^k \} + f_0(t) \\
 &= \sum_{k=1}^n (a h_k + a i_k) \cdot t^k + f_0(t) \\
 &= \sum_{k=1}^n a h_k \cdot t^k + f_0(t) + \sum_{k=1}^n a i_k \cdot t^k + f_0(t) = (aH)_{(t)} + (aI)_{(t)}
 \end{aligned}$$

$$\text{よ} \cdot a(H+I) = aH + aI$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad ((ab)H)_{(t)} &= \sum_{k=1}^n \{ (ab) h^k \cdot t^k \} + f_0(t) \\
 &= \sum_{k=1}^n \{ a(b h^k) \cdot t^k \} + f_0(t) = (a(bH))_{(t)}
 \end{aligned}$$

$$\text{よ} \cdot (ab)H = a(bH)$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad (1 \cdot H)_{(t)} &= \sum_{k=1}^n (1 \cdot h^k \cdot t^k) + f_0(t) \\
 &= \sum_{k=1}^n (h^k \cdot t^k) + f_0(t) = H_{(t)}
 \end{aligned}$$

$$\text{よ} \cdot 1H = H$$

$$(7) \sim (7) \text{ よ} \cdot$$

$X$  はベクトル空間である.