

B.2.1

$A = (a_{ij})$ とすると、 A は上三角行列なので、その列ベクトルは、

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

と表せる。

$C_1 a_1 + C_2 a_2 + \dots + C_n a_n = 0 \ (C_i \in \mathbb{R})$ とすると、

$$(\text{左辺}) = \begin{pmatrix} C_1 a_{11} + C_2 a_{12} + \dots + C_n a_{1n} \\ C_2 a_{22} + C_3 a_{23} + \dots + C_n a_{2n} \\ \vdots \\ C_n a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i) 第 n 行に注目すると、 $C_n a_{nn} = 0$

A の対角成分は 0 でないので、 $a_{nn} \neq 0$ より、 $C_n = 0$

(ii) $C_{i+1}, \dots, C_n = 0$ ならば " $C_i = 0 \ (1 \leq i \leq n-1)$ " となることを示す。

第 i 行目に注目すると、 $C_i a_{ii} + C_{i+1} a_{ii+1} + \dots + C_n a_{in} = 0$

仮定より、 $C_i a_{ii} = 0$

A の対角成分は 0 でないので、 $a_{ii} \neq 0$ より、 $C_i = 0$

(i), (ii) より、 $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$

したがって、 $a_1, \dots, a_n$ は線形独立。□