B-2-2　AHA23014 稲垣秀楠

問.

$n \in \mathbb{N}$　$n \geq 2$ とする. e_i $(i = 1, \cdots, n)$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする.

$(*)$: $e_1 + e_2,\ e_2 + e_3, \cdots, e_{n-1} + e_n,\ e_n + e_1$

について. 次の各問に答えよ.

(1) n が偶数の時、$(*)$ は線形従属であることを示せ.

(2) n が奇数の時、$(*)$ は線形独立であること、さらに $\mathbb{R}^n$ の基底となることを示せ.

(証)

$$x = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (e_i + e_{i+1})$$

(ただし. 便宜的に e_{n+1} を e_1 で定める)

(1) n: 偶数のとき.

$$x = (e_1 + \cancel{e_2}) - (\cancel{e_2} + \cancel{e_3}) + \cdots + (\cancel{e_{n-1}} + \cancel{e_n}) - (\cancel{e_n} + e_1)$$

$$= e_1 - e_1 = 0$$

よって(*)の交代和が0となるので.

(*)は非自明な一次関係をもつので一次従属 ∎

(2) n:奇数のとき.

$$x=(e_1+\cancel{e_2})-(\cancel{e_2}+\cancel{e_3})+\cdots-(\cancel{e_{n-1}}+\cancel{e_n})+(\cancel{e_n}+e_1)$$

$$=2e_1$$

よって. $e_1=\frac{1}{2}x$

$$\therefore\ e_1\in\langle e_1+e_2,e_2+e_3,\cdots,e_{n-1}+e_n,e_n+e_1\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$e_2=(e_1+e_2)-e_1\ \in\ 〃$$

$$e_3=(e_2+e_3)-e_2\ \in\ 〃$$

$$\vdots$$

$$e_n=(e_n+e_{n-1})-e_{n-1}\ \in\ 〃$$

$$\therefore\ e_1,\cdots,e_n\in\ 〃$$

$$\therefore\ \mathbb{R}^n=\langle e_1,\cdots,e_n\rangle_{\mathbb{R}}\subset\langle e_1+e_2,\cdots,e_n+e_1\rangle_{\mathbb{R}}$$

よって $\langle e_1+e_2,\cdots,e_n+e_1\rangle_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}^n$ より

(*)は$\mathbb{R}^n$の生成系.

ところで $\mathbb{R}^n$ の次元は n. よって n 次元空間の

n 本の生成系は基底だから (*) は一次独立 ☒

(別)

(*) が生成系であることは上と同様. 以下, 一次独立を示す。

$c_1(e_1+e_2)+\cdots+c_n(e_n+e_1)=0$ ならば.

$$(c_n+c_1)e_1+(c_1+c_2)e_2+\cdots+(c_{n-2}+c_{n-1})e_{n-1}+(c_{n-1}+c_n)e_n=0$$

$$\begin{bmatrix} c_1+c_n \\ c_2+c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1}+c_{n-2} \\ c_n+c_{n-1} \end{bmatrix}=0 \quad \therefore \begin{cases} c_1+c_n=0 \\ c_2+c_1=0 \\ \vdots \\ c_{n-1}+c_{n-2}=0 \\ c_n+c_{n-1}=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} c_1=-c_n \\ c_2=-c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1}=-c_{n-2} \\ c_n=-c_{n-1} \end{cases} \quad \text{☆}$$

☆ の右辺と左辺の総積をとると.

$$\prod_{i=1}^{n} c_i=\prod_{i=1}^{n}(-c_i) \quad \text{となる.}$$

$$(\text{右辺})=(-1)^n\prod_{i=1}^{n} c_i=-\prod_{i=1}^{n} c_i \quad (n\text{:奇数より})$$

$\therefore \prod_{i=1}^{n} c_i=0$. よって $c_1,\cdots,c_n$ のいずれかが 0.

したがって, ☆より. $c_1=\cdots=c_n=0$. よって (*) は一次独立.