

問 B.2.4

AHA23007 木下翔太

問題

$M_n(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ と自然に同一視することにより数ベクトル空間と考えられる. このとき、

$$Sym_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | {}^tA = A\}, Alt_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | {}^tA = -A\}$$

とする. また、 $i, j = 1, \dots, n$ に対し、 (i, j) 成分のみ 1 で、他の成分は全て 0 であるような $M_n(\mathbb{R})$ の元を E_{ij} で表す.

このとき、 $Sym_n(\mathbb{R}), Alt_n(\mathbb{R})$ それぞれについて、その一組の基底を、 $E_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$ を用いて表せ. また、それぞれの次元を求めよ.

解答

[1] $Sym_n(\mathbb{R})$ について

$\{E_{ij} + E_{ji} (1 \leq j < i \leq n), E_{ii} (1 \leq i \leq n)\}$ が基になることを示す.

[A] 1 次独立について

$E_{ij} + E_{ji} (1 \leq j < i \leq n), E_{ii} (1 \leq i \leq n)$ の一次関係を

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

とする. また、

$$C = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji})$$

とおくと、

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} E_{ij} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} E_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} E_{ij} + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} E_{ij} \end{aligned}$$

よって、C の (i, j) 成分を c_{ij} とすると

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & (i = j) \\ a_{ij} & (i > j) \\ a_{ji} & (i < j) \end{cases}$$

また、

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} E_{ij}$$

(1) より、

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} E_{ij} = \mathbf{0}$$

なので、任意の i, j の対して、 $c_{ij} = 0$

つまり、 $E_{ij} + E_{ji} (1 \leq j < i \leq n)$, $E_{ii} (1 \leq i \leq n)$ は、非自明な 1 次関係を持たないので、1 次独立.

[B] 生成について

任意の $A = (a_{ij}) \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ をとると、

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} E_{ij} + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} E_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} E_{ij} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji} E_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} E_{ij} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} E_{ji} \quad (\because (2)) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}) \end{aligned}$$

よって、 $E_{ij} + E_{ji} (1 \leq j < i \leq n)$, $E_{ii} (1 \leq i \leq n)$ は $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ を生成する.

[A][B] より、 $\{E_{ij} + E_{ji} (1 \leq j < i \leq n), E_{ii} (1 \leq i \leq n)\}$ は、 $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ の基である.

また、

$$\begin{aligned} \dim(\text{Sym}_n(\mathbb{R})) &= n + \frac{n^2 - n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \end{aligned}$$

[2] $\text{Alt}_n(\mathbb{R})$ について

$\{E_{ij} - E_{ji} (1 \leq j < i \leq n)\}$ が基になることを示す.

[A] 1 次独立について

$E_{ij} - E_{ji} (1 \leq j < i \leq n)$ の一次関係を

$$\sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (E_{ij} - E_{ji}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

とする. また、

$$C = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (E_{ij} - E_{ji})$$

とおくと、

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} E_{ij} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} (-a_{ij}) E_{ji} \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} E_{ij} + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} (-a_{ji}) E_{ij} \end{aligned}$$

よって、 C の (i,j) 成分を c_{ij} とすると

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & (i = j) \\ a_{ij} & (i > j) \\ -a_{ji} & (i < j) \end{cases}$$

また、

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} E_{ij}$$

(3) より、

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} E_{ij} = \mathbf{0}$$

なので、任意の i,j の対して、 $c_{ij} = 0$

つまり、 $E_{ij} - E_{ji} (1 \leq j < i \leq n)$ は、非自明な 1 次関係を持たないので、1 次独立.

[B] 生成について

任意の $A = (a_{ij}) \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ をとると、

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij} \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} E_{ij} + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} E_{ij} \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} E_{ij} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji} E_{ji} \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} E_{ij} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} (-a_{ij}) E_{ji} \quad (\because (4)) \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (E_{ij} - E_{ji}) \end{aligned}$$

よって、 $E_{ij} - E_{ji} (1 \leq j < i \leq n)$ は $\text{Alt}_n(\mathbb{R})$ を生成する.

[A][B] より、 $\{E_{ij} - E_{ji} (1 \leq j < i \leq n)\}$ は、 $\text{Alt}_n(\mathbb{R})$ の基である.

また、

$$\dim(\text{Sym}_n(\mathbb{R})) = \frac{n^2 - n}{2} \quad \square$$