

数学基礎演習

A1A 23035 勝浦大輝

$(t, t^2, \dots, t^n)$ が V の基底であることを示す。

① $(t, t^2, \dots, t^n)$ が一次独立であることを示す。

$$c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n = 0 \text{ とすると,}$$

$t \neq 0$ のとき

$$c_1 + c_2 t + \dots + c_n t^{n-1} = 0 \text{ である。}$$

そこで、 $t=1, 2, \dots, n$ を代入すると、次の n 個の式が得られる。

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0$$

$$c_1 + c_2 \cdot 2 + \dots + c_n \cdot 2^{n-1} = 0$$

$$\vdots$$

$$c_1 + c_2 \cdot n + \dots + c_n \cdot n^{n-1} = 0$$

$$\text{よって, } \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (*)$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix}$ とすると、 A の行列式は「ヴァンデルモント」の行列式

$$\text{なので, } \det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \neq 0$$

従って A は逆行列 A^{-1} を持つので、(*) の両辺に左から A^{-1} をかけることで、

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ が得られる。よって } (t, t^2, \dots, t^n) \text{ は一次独立。}$$

② $(t, t^2, \dots, t^n)$ が V を生成することを示す。

$\forall f \in V$ とする。

このとき、 $f(0)=0$ より、 $f(t)$ は t を因数持つ。

従って $f(t) = t \cdot g(t)$ (t は $n-1$ 次以下の整式) と表すことができる。

$$\text{そこで } g(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} \text{ とすると}$$

$$f(t) = t \cdot (a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}) = a_0 t + a_1 t^2 + \dots + a_{n-1} t^n$$

よって $f(t)$ は $(t, t^2, \dots, t^n)$ の一次結合で表せるので V を生成する。

①②より $(t, t^2, \dots, t^n)$ は V の基底であり、次元は n