

$(t^2-1), t(t^2-1), \dots, t^{n-2}(t^2-1)$ が W の基底であることを示す。

① $(t^2-1), t(t^2-1), \dots, t^{n-2}(t^2-1)$ が $n-1$ 次独立であることを示す。

$$c_1(t^2-1) + c_2 t(t^2-1) + \dots + c_{n-1} t^{n-2}(t^2-1) = 0 \text{ とする。}$$

ここで $t \neq -1$ のとき、

$$c_1 + c_2 t + \dots + c_{n-1} t^{n-2} = 0$$

$t = 2, 3, \dots, n$ を代入すると次の $n-1$ 個の式を得られる。

$$c_1 + c_2 \cdot 2 + \dots + c_{n-1} \cdot 2^{n-2} = 0,$$

$$c_1 + c_2 \cdot 3 + \dots + c_{n-1} \cdot 3^{n-2} = 0$$

$$\vdots$$

$$c_1 + c_2 \cdot n + \dots + c_{n-1} \cdot n^{n-2} = 0$$

よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2^{n-2} \\ 1 & 3 & \dots & 3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & \dots & n^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad (**)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2^{n-2} \\ 1 & 3 & \dots & 3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & \dots & n^{n-2} \end{pmatrix} \text{ とすると、} A \text{ の行列式は、ジャンデルモビルの行列式}$$

なので、 $\det A = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (j-i) \neq 0$ となる。 A は可逆行列 A^{-1} を持つ。

(**) の両辺に左から A^{-1} をかけると、 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ を得られるので、

従って $(t^2-1), t(t^2-1), \dots, t^{n-2}(t^2-1)$ は $n-1$ 次独立。

② $(t^2-1), t(t^2-1), \dots, t^{n-2}(t^2-1)$ が W を生成することを示す。

$\forall f \in W$ をとる。

$f(1) = f(-1) = 0$ より、 $f(t)$ は $(t-1)(t+1)$ を因数に持つので、

$f(t) = (t-1)(t+1)g(t) = (t^2-1)g(t)$ ($g(t)$ は $n-2$ 次以下の整式) と表せる。

$g(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-2} t^{n-2}$ とすると、

$$f(t) = (t^2-1)g(t) = a_0(t^2-1) + a_1 t(t^2-1) + \dots + a_{n-2} t^{n-2}(t^2-1)$$

よって $f(t)$ は $(t^2-1), t(t^2-1), \dots, t^{n-2}(t^2-1)$ の $n-1$ 次線形結合で表せるので、 W を生成する。

よって ①、② より、 $(t^2-1), t(t^2-1), \dots, t^{n-2}(t^2-1)$ は W の基底である。 $n-2$ 次元 (すなわち $n-1$ 次)