

問 B.3.1(b)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$ を簡約化すると、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} - \textcircled{1} \times a} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2 - a^2 & -2a \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} - \textcircled{2} \times a} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 - a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^3 - 4a \end{pmatrix}$$

ここで、 $a^3 - 4a = 0$ とすると、 $a = 0, \pm 2$

$a = 0$ のとき、

$$A \xrightarrow[\text{(簡約化)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 - a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^3 - 4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より、 $\text{rank} A = 2$

$a = 2$ のとき、

$$A \xrightarrow[\text{(簡約化)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 - a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^3 - 4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より、 $\text{rank} A = 2$

$a = -2$ のとき、

$$A \xrightarrow[\text{(簡約化)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 - a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^3 - 4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より、 $\text{rank}A = 2$

また、 $a^3 - 4a \neq 0$ すなわち、 $a \neq 0$ かつ $a \neq \pm 2$ のとき、

$$A \xrightarrow[\text{(簡約化)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^3-4a \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} \times \frac{1}{a^3-4a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{1}-\textcircled{3} \times (2-a^2)]{\textcircled{2}-\textcircled{3} \times a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より、 $\text{rank}A = 3$

以上より、

$$A = \begin{cases} 2 & (a = 0, \pm 2 \text{ のとき}) \\ 3 & (a \neq 0 \text{ かつ } a \neq \pm 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

■