

B 3.1 (c)

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \text{ を簡約化すると}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] \leftrightarrow [3]} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \leftrightarrow [3]} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [2] - [1] \times a \\ [3] - [1] \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

 $a-1=0$ すなわち $a=1$ のとき

$$A \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{より rank } A = 1$$

 $a-1 \neq 0$ すなわち $a \neq 1$ のとき

$$A \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \times \frac{1}{a-1}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \times \frac{1}{1-a}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1+a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} [1] - [3] \\ [2] - [3] \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 $1+a=0$ すなわち $a=-1$ のとき

$$A \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \leftrightarrow [3]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より rank $A = 2$

 $a \neq \pm 1$ のとき

$$A \xrightarrow{\text{(簡約化)}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \times \frac{1}{1+a}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] - [2] \times a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より rank $A = 3$

以上より

$$\text{rank } A = \begin{cases} 1 & (a=1 \text{ のとき}) \\ 2 & (a=-1 \text{ のとき}) \\ 3 & (a \neq \pm 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$