

B.3.1.(d)

$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ を簡約化する。

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] - [2]} \begin{pmatrix} 0 & 1-a & 1-a \\ a & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$1-a=0$ つまり $a=1$ のとき。

$$A \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 0 & 1-a & 1-a \\ a & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] \leftrightarrow [3]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] - [1]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ となり } \text{rank } A = 1$$

$1-a \neq 0$ つまり $a \neq 1$ のとき

$$A \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 0 & 1-a & 1-a \\ a & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] \times \frac{1}{1-a}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$a=0$ のとき

$$A \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] \leftrightarrow [3]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] - [2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \leftrightarrow [1]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ となり } \text{rank } A = 2$$

$a \neq 1$ かつ $a \neq 0$ のとき

$$A \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \times \frac{1}{a}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] - [3]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \times \frac{1}{1-a}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] - [2]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[3] - [1]} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{[3] - [2] \times a} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] \leftrightarrow [3]} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] \leftrightarrow [2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となり } \text{rank } A = 3$$

$$\text{以上より } \text{rank } A = \begin{cases} 1 & (a=1) \\ 2 & (a=0) \\ 3 & (a \neq 1 \text{ かつ } a \neq 0) \end{cases}$$