

数学基礎演習2・演習問題

AHA23045 千葉 虎左

問 B.3.1 (8)

以下、行列の基本変形について $[i] \times j$ で第 i 行を j 倍する操作、
 $[k] \leftrightarrow [l]$ で第 k 行と第 l 行を入れ替える操作、
 $[p] + [q] \times r$ で第 p 行に第 q 行の r 倍を加える操作を表すものとする
 ただし、 $r = -1$ のときは、 $[p] - [q]$ と表すものとする

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & a & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \text{ を簡約化すると、}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & a & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] - [3]} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ a & a & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [1] \times \frac{1}{2} \\ [2] - [3] \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & a-2 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] - [1] \times a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2a-2 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2] \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \leftrightarrow [3]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$a = 0 \text{ のとき } A \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [2] \times \frac{1}{2} \\ [1] - [3] \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3] + [2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よ、 $\text{rank } A = 2$

$$a \neq 0 \text{ のとき } A \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \times \frac{1}{a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{a} \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a-1=0 \therefore a=1 \text{ のとき } A \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{a} \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よ、 $\text{rank } A = 2$

$$a \neq 0 \text{ かつ } a \neq 1 \text{ のとき } A \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{a} \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3] \times \frac{1}{a-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} [2] - [3] \times \frac{2}{a} \\ [1] + [3] \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よ、 $\text{rank } A = 3$

以上より、
 $\text{rank } A = \begin{cases} 2 & (a=0 \text{ のとき}) \\ 2 & (a=1 \text{ のとき}) \\ 3 & (a \neq 0 \text{ かつ } a \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \text{ である}$