

ABA23043 竹村 蒼仁

B 3.1. (h)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] \leftrightarrow [2]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] - [1] \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -2a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1] + [2]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & -1 & -2a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3] - [2] \times a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 2-2a^2 \end{pmatrix}$$

(i) $2-2a^2=0$ となる $a=\pm 1$ のとき

$$a=1 \text{ のとき } A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a=-1 \text{ のとき } A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\text{rank } A = 2$

(ii) $a \neq \pm 1$ のとき

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 2-2a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3] \times \frac{1}{2-2a^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} [1] + [3] \times a \\ [2] - [3] \times 2a \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $\text{rank } A = 3$

以上により

$$\text{rank } A = \begin{cases} 2 & (a = \pm 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (a \neq \pm 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$