

問B.3.1(i) AHA23021 前野 勇成

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \text{ を簡約化する.}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] - [1] \times a} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{a}{2} & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{[2] + [3] \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] - [2] \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a+1}{2} \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3] - [2] \times a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a+1}{2} \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 2 \end{pmatrix}$$

$[1] - a^2 - a + 2 = 0$ のとき すなわち $a = -2, 1$ のとき

$$a = -2 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a+1}{2} \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = 1 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a+1}{2} \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{rank } A = 2$$

$[2] - a^2 - a + 2 \neq 0$ のとき

すなわち $a \neq -2, a \neq 1$ のとき

$$A \xrightarrow{(\text{簡約化})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a+1}{2} \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3] \times \frac{1}{-a^2 - a + 2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a+1}{2} \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1] + [3] \times \frac{a+1}{2}, [2] - [3] \times (a+1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{rank } A = 3$$

$$[1], [2] \neq 0 \quad \text{rank } A = \begin{cases} 2 & (a = -2, 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (a \neq -2, a \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{である}$$