

問 B. 3.2 AHA 230c2 松下 温嗣

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \quad \text{12711?}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

$$\begin{aligned} |A| &= bc^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2 - ac^2 - cb^2 \\ &= -(b-c)a^2 + (b^2 - c^2)a - bc(b-c) \\ &= -(b-c) \{ a^2 - (b+c)a + bc \} \\ &= (a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

(2) $\text{rank } A$ を求めよ.

$$\circ \det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank } A = 3$$

$$(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0 \Leftrightarrow (a \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge (c \neq a)$$

$$\circ \det A = 0 \text{ のとき, } \text{rank } A \neq 3$$

$\cdot (a=b \neq c) \vee (b=c \neq a) \vee (c=a \neq b)$ (2つの行列が同じ) とき 例に於て: $a=b \neq c$ とする.

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2]-[1]} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2] \leftrightarrow [3]} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2]-[1]} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2] \times \frac{1}{c-a}} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & c+a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

他の場合も同様にして. $\text{rank } A = 2$

$\cdot a=b=c$ (3つの行列がすべて同じ) とき.

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2]-[1]} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2]-[1]} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{rank } A = 1$$

12711?.

$$\text{rank } A = \begin{cases} 3 & (a \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge (c \neq a) \\ 2 & (a=b \neq c) \vee (b=c \neq a) \vee (c=a \neq b) \\ 1 & (a=b=c) \end{cases}$$