

AHA23051 後呂悠惟

B.3.3(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

(1)

$$|A| = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + a \cdot a \cdot a - a \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot a \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot a = a^3 + 1$$

(2)

$$|A| \neq 0 \text{つまり } a^3 + 1 \neq 0 \\ (a+1)(a^2 - a + 1) \neq 0 \text{で } a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0 \text{より、} \\ a \neq 1$$

(3)

各余因子を求め、それをならべたあと転値したものが余因子行列である。

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -a & a^2 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

(4)

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|} \text{より } A^{-1} = \frac{1}{a^3 + 1} \begin{pmatrix} -a & a^2 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ a^2 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

(5)

$$a = -1 \text{のときである。} \\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{②} + \text{①} + \text{③}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \textcircled{3} + \textcircled{1} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{3} \rightarrow \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} \\ \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{3} \end{matrix}$$

よって $\text{rank} A = 2$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \textcircled{2} - \textcircled{1} \\ \textcircled{3} - \textcircled{1} \end{matrix}$$

よって $\text{rank} \tilde{A} = 1$

($\textcircled{1}$ は一行目を指し、行の横に書くことでその行での操作を表す
 $\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1}$ は二行目を一行目にするという意味である)