問 B.3.3.(b)　aは実数とする。3 次正方行列 A=$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & a^2\\ 0 & a^2 & a^4\end{pmatrix}$について各問に答えよ。

⑴ 行列式|A|を求めよ。

⑵ |A|≠0 となるaの条件を求めよ。

⑶ A の余因子行列 Ã を求めよ。

⑷ ⑵で得た条件を満たすaについて、A の逆行列A^{-1}を求めよ。

⑸ ⑵で得た条件を満たさないaについて、rank A, rank Ã を求めよ。

[解]

⑴ 第 1 列に関する余因子展開により、

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & a^2\\ 0 & a^2 & a^4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}a & a^2\\ a^2 & a^4\end{vmatrix}=a^5-a^4$$

⑵ ⑴より、$|A|=a^4(a-1)$

aは実数であるから、$|A|\neq 0$ となるのは$a\neq 0, 1$ のとき

⑶ 余因子行列 $\tilde{A}=[a_{ij}^*]$とすると、$a_{ij}^* = (-1)^{i+j}\left|A_{ji}\right|$である。よって

$a_{11}^*=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a & a^2\\ a^2 & a^4\end{vmatrix}=a^5-a^4$　　$a_{12}^*=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ a^2 & a^4\end{vmatrix}=-a^4+a^2$

$a_{13}^*=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ a & a^2\end{vmatrix}=a^2-a$　　$a_{21}^*=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & a^2\\ 0 & a^4\end{vmatrix}=0$

$a_{22}^*=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & a^4\end{vmatrix}=a^4$　　$a_{23}^*=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & a^2\end{vmatrix}=-a^2$

$a_{31}^*=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & a\\ 0 & a^2\end{vmatrix}=0$　　$a_{32}^*=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & a^2\end{vmatrix}=-a^2$

$a_{33}^*=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & a\end{vmatrix}=a$

以上より、余因子行列 $\tilde{A}=\begin{pmatrix}a^5-a^4 & -a^4+a^2 & a^2-a\\ 0 & a^4 & -a^2\\ 0 & -a^2 & a\end{pmatrix}$

⑷ ⑵より、|A|≠0 であるから、$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}=\frac{1}{a^5-a^4}\begin{pmatrix}a^5-a^4 & -a^4+a^2 & a^2-a\\ 0 & a^4 & -a^2\\ 0 & -a^2 & a\end{pmatrix}$

(5) (ⅰ) $a=0$のとき

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \tilde{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって rank A=1, rank Ã=0

(ⅱ) $a=1$のとき

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad \tilde{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$A\xrightarrow[(\text{簡約化})]{}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{[1]-[2]}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{[3]-[2]}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}\xrightarrow[(\text{簡約化})]{}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{[1]\leftrightarrow[3]}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{[1]\times(-1)}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{[2]-[1]}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって rank A=2, rank Ã=1

(ⅰ), (ⅱ)より、$\text{rank A}=\begin{cases}1 & (a=0\text{ のとき})\\2 & (a=1\text{ のとき})\end{cases}\qquad \text{rank }\tilde{A}=\begin{cases}0 & (a=0\text{ のとき})\\1 & (a=1\text{ のとき})\end{cases}$