

数学基礎演習解答B4-2

AHA23034 野村尚平

(b)

(1) A の固有多項式 $gt(A)$ を求めると

$$gt(A) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-7 & 6 \\ 6 & t+2 \end{vmatrix} = (t-7)(t+2) - 36 = (t-10)(t+5)$$

よって固有値 λ は $\lambda = -5, 10$ ■

(2) $\lambda = -5$ のとき

$(5E - A)x = \mathbf{0}$ の解空間が $W(-5; A)$ の固有空間であるので

$$-5E - A = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } x = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\therefore W(-5; A) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

$\lambda = 10$ のとき

$(10E - A)x = \mathbf{0}$ の解空間が $W(10; A)$ の固有空間であるので

$$10\lambda - A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

これを簡約化すると

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } \mathbf{x} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\therefore W(10; A) = \left\{ c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\} \quad \blacksquare$$

(3) $\dim \{W(-5; A)\} + \dim \{W(10; A)\} = 1 + 1 = 2$ より A は対角化可能である

$$W(-5; A) \text{ の基 } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ を正規化すると } \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{また } W(10; A) \text{ の基 } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ を正規化すると } \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$W(-5; A)$ の各ベクトルと $W(10; A)$ の各ベクトルは直交するので

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ は } \mathbb{R}^2 \text{ の正規直交基である}$$

よって P を $\mathbb{R}^2$ の正規直交基を列ベクトルにもつ行列とすると

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ でありこれは直交行列である}$$

またこのとき P^{-1} を求めると

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$P^{-1}AP = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -25 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

したがって対角化可能である

$$\text{以上より } P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \blacksquare$$

(4) $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とおき直交変数変換すると

$$7x^2 - 12xy - 2y^2 = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = {}^t(P\mathbf{x}')A(P\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}'({}^tPAP)\mathbf{x}'$$

ここで P は直交行列より $P^{-1} = P$ であるので

$${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\therefore {}^t\mathbf{x}'({}^tPAP)\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -5x'^2 + 10y'^2$$

よって $-5x'^2 + 10y'^2 = 1$ すなわち $5x'^2 - 10y'^2 = -1$ と表すことができる

これは $x'y'$ 平面上で中心が原点で頂点が $\left(0, \pm \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ 、焦点が $\left(0, \pm \frac{\sqrt{30}}{10}\right)$

である双曲線を表す

直交変数変換 $\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$ に現れる 2×2 直交行列 P について $\det P = 1$ が成り立

つので、この座標変換は回転移動による変換であり、 $7x^2 - 12xy - 2y^2 = 1$ は

xy 平面上で中心が原点で頂点が $\left(\mp \frac{\sqrt{2}}{5}, \pm \frac{\sqrt{2}}{10}\right)$ (複号同順)、焦点が

$\left(\mp \frac{\sqrt{6}}{5}, \pm \frac{\sqrt{6}}{10}\right)$ (複号同順) である双曲線を表す ■