B.4.2(d)

<問題>

曲線$2x^2+28xy+23y^2=30$について、この方程式の左辺が$A=\begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 14 & 23 \end{pmatrix}$を用いると${}^t x\,Ax$と書けることに注意して、次の各問に答えよ。

(1) 行列Aの固有値を全て求めよ。
(2) (1)で求めた各固有値に対するAの固有ベクトルを一つずつ求めよ。
(3) 行列Aを対角化する直交行列Pを一つ求めよ。
(4) (3)で求めたPを用いて、問の曲線の方程式を適当な座標で書き直し、この曲線がどのような曲線であるか答えよ。

<解答>

(1) Aの固有多項式について、

$$g_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -14 \\ -14 & \lambda-23 \end{vmatrix}=(\lambda-30)(\lambda+5)$$

より、Aの固有値は-5, 30 である。

(2) $[\lambda=-5]$

このとき、$(-5\mathrm{E}-A)x=0$の解空間がAの固有値-5の固有空間$W(-5;A)$である。

$-5\mathrm{E}-A$を簡約化すると、$-5\mathrm{E}-A=\begin{pmatrix} -7 & -14 \\ -14 & -28 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

よって、$(-5\mathrm{E}-A)x=0$の解は$x=t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}[t\in R]$であるから、

$$W(-5;A)=\left\{ t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t\in R \right\}$$

したがって、$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$は$A$の固有値$-5$に属する$A$の固有ベクトルである。

$[\lambda=30]$

このとき、$(30\mathrm{E}-A)x=0$の解空間がAの固有値30の固有空間$W(30;A)$である。

$30\mathrm{E}-A$を簡約化すると、$30\mathrm{E}-A=\begin{pmatrix} 28 & -14 \\ -14 & 7 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

よって、$(30\mathrm{E}-A)x=0$の解は$x=t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}[t\in R]$であるから、

$$W(30;A)=\left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| t\in R \right\}$$

したがって、$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$は$A$の固有値$30$に属する$A$の固有ベクトルである。

(3) $dim(W(-5;A))+dim(W(30;A))=1+1=2$より、$A$は対角化可能である。

このとき、$W(-5;A),W(30;A)$の基$\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$をそれぞれ正規化すると、

$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\},\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$

よって、$W(-5;A), W(30;A)$それぞれの各ベクトルは直交するから、

$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$は$R^2$の正規直交基である。

したがって、このR^2の正規直交基を列ベクトルにもつ行列を$P=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$とおくと、

Pは直交行列で、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-5 & 0\\0 & 30\end{pmatrix}$と対角化できる。

(4)　(３)より、${}^t P\,AP=\begin{pmatrix}-5 & 0\\0 & 30\end{pmatrix}$

このとき、$x=Px', x=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, x'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$とすると、

$${}^t x\,A\,x={}^t(Px')A(Px')={}^t x'({}^t P\,AP)x'=(x' \quad y')\begin{pmatrix}-5 & 0\\0 & 30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=-5x'^2+30y'^2$$

よって、$2x^2+28xy+23y^2=30$は$-5x'^2+30y'^2=30$と表すことができ、これは$x'y'$平面上で中心が原点、頂点が$(0,\pm1)$、焦点が$(0,\pm\sqrt{7})$の双曲線を表す方程式である。

ここで、$x=Px', x=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, x'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$より、$x=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x'+y')$,y=$\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y')$

また、直交変数変換$x=Px'$に現れる 2×2 直交行列Pについて、$\det P=1$が成り立つことから、この座標変換は回転移動による変換である。

したがって、$2x^2+28xy+23y^2=30$はxy平面上で中心が原点、頂点が

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$[複合同順]、焦点が$\left(\pm\sqrt{\frac{7}{5}},\pm\sqrt{\frac{14}{5}}\right)$[複合同順]の双曲線を表す方程式である。