問. $A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ b^2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。A^nを求めよ。

(ｉ)$a = 0, b = 0$のとき

Aは単位行列なので$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ⅱ)$a = 0, b \neq 0$のとき

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b^2 & 1 \end{pmatrix}$より、$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ nb^2 & 1 \end{pmatrix}$であると仮定すると

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ nb^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ nb^2 + b^2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)b^2 & 1 \end{pmatrix}$

となり数学的帰納法により、上で仮定した主張は任意の自然数 n について成立。

(ⅲ) $a \neq 0, b = 0$のとき

$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$より、$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$であると仮定すると

$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & na^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & na^2 + a^2 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

となり、学的帰納法により、上で仮定した主張は任意の自然数 n について成立。

(ⅳ)$a \neq 0, b \neq 0$のとき

Aの固有多項式$g_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -a^2 \\ -b^2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 - (ab)^2 = (t-(1+ab))(t-(1-ab))$

よりAの固有値$\lambda = 1 + ab,\ 1 - ab$

ここで$1 + ab = 1 - ab$とすると$2ab = 0$から、$a = 0$または$b = 0$となるが条件より

$a \neq 0, b \neq 0$なので固有値λは異なる。

(1) $\lambda = 1 + ab$のとき$(1+ab)E - A = \begin{pmatrix} ab & -a^2 \\ -b^2 & ab \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & -a \\ -b^2 & ab \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

よって $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix}, (t \in R)$

(2) $\lambda = 1 - ab$のとき$(1-ab)E - A = \begin{pmatrix} -ab & -a^2 \\ -b^2 & -ab \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & a \\ b^2 & ab \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

よって $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -\frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix}, (r \in R)$

ここで$\dim(1+ab; A) + \dim(1-ab; A) = 1 + 1 = 2$より$A$は対角化可能

よって$(1+ab; A), (1-ab; A)$の基を用いて

$P = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & -\frac{a}{b} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$を構成すると、$P^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} \\ -1 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} = \frac{b}{2a} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} \\ -1 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 1 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix}$

また

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 1 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ b^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & -\frac{a}{b} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{b}{a} + b^2 & ab + 1 \\ -\frac{b}{a} + b^2 & -ab + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & -\frac{a}{b} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + 2ab & 0 \\ 0 & 2 - 2ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + ab & 0 \\ 0 & 1 - ab \end{pmatrix} = B$$と置く。

Bは対角行列なので$B^n = \begin{pmatrix} (1+ab)^n & 0 \\ 0 & (1-ab)^n \end{pmatrix} = (P^{-1}AP)^n$

また、$P^{-1}AP = B$より$A = PBP^{-1}$

$A^n = (PBP^{-1})^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \cdots\cdots (PBP^{-1})$また、$P^{-1}P = E$より

$A^n = PB^nP^{-1}$ となり

$$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & -\frac{a}{b} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+ab)^n & 0 \\ 0 & (1-ab)^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 1 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{a}{b}(1+ab)^n & -\frac{a}{b}(1-ab)^n \\ (1+ab)^n & (1-ab)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 1 \\ -\frac{b}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\{(1+ab)^n + (1-ab)^n\} & \frac{a}{2b}\{(1+ab)^n - (1-ab)^n\} \\ \frac{b}{2a}\{(1+ab)^n - (1-ab)^n\} & \frac{1}{2}\{(1+ab)^n + (1-ab)^n\} \end{pmatrix}$$