

数学基礎演習 2

AHA23050 山口創大

2023 年 12 月 17 日

1 B,4,2(B)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \text{ について}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ。

λ : A の固有値とする。

固有多項式 $g_A(t)$ の根が λ (固有値) であるので

$$|A - tE|$$

$$= \begin{vmatrix} -t-2 & 2 \\ -10 & -t+7 \end{vmatrix}$$

$$= (t+2)(t-7) + 20$$

$$= (t-2)(t-3)$$

よって上の固有多項式の根は 2, 3

従って A の固有値は $\lambda = 2, 3$.

(2) (1) で求めた各 λ に対する A の固有ベクトルを求めよ。

(i) $\lambda = 2$ のとき

連立方程式 $(2E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間が固有値 2 の固有空間 $W(2; A)$ であるから

この連立方程式を解くと

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\forall t \in \mathbf{R}) \text{ となるので}$$

$$W(2; A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

よって $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\lambda = 3$ のとき

連立方程式 $(3E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間が固有値 3 の固有空間 $W(3; A)$ であるから

この連立方程式を解くと

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} (\forall t \in \boldsymbol{R}) \text{ となるので}$$

$$W(3; A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \mid t \in \boldsymbol{R} \right\}$$

$$\text{よって } \lambda = 3 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 A を対角化する正則行列 P を求めよ。

(2) より, $\dim(W(2; A)) + \dim(W(3; A)) = 1 + 1 = 2$ より行列 A は対角化可能である。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ である。}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

以上のように行列 A が対角化された。

よって求める正則行列 P は $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ である。

(4) (3) より

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 5 \cdot 2^{n+1} - 10 \cdot 3^n & -2^{n+2} + 5 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$