

(1) A の固有方程式 $f_A(t)$ は、

$$f_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t+6 & -6 \\ 12 & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - 5t + 6$$

$f_A(t) = 0$ を解くと、 $\lambda = 2, 3$ 、

(2) $\lambda = 2$ のとき

$(2E - A)x = 0$ の解空間が固有値 $\lambda = 2$ の固有空間である

このとき $2E - A$ を簡約化する、

$$2E - A = \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -9 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{4} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

だから、 $(2E - A)x = 0$ の解は、

$$x = c \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

よって、 $W(2; T) = \left\{ c \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$ で、求める固有ベクトルは、 $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 、

$\lambda = 3$ のとき

$(3E - A)x = 0$ の解空間が固有値 $\lambda = 3$ の固有空間である

このとき $3E - A$ を簡約化する、

$$3E - A = \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 12 & -9 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

だから、 $(3E - A)x = 0$ の解は、

$$x = c \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

よって、 $W(3; T) = \left\{ c \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$ で、求める固有ベクトルは、 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 、