B.4.5(d)
(1)
A の固有多項式 $g_A(t)$ を求めると

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t+1 & -1 \\ 6 & t-4 \end{vmatrix} = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$$

となるので、A の固有値は $\lambda = 1, 2$ である。
(2)
$\lambda = 1$ とする。
$(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間がAの固有値 1 の固有空間 $W(1; A)$ である。
このとき $E - A$ を簡約化すると

$$E - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、$(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (t \in \boldsymbol{R})$$

従って、

$$W(1; A) = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} | t \in \boldsymbol{R}\}$$

よって、$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 1 に属する A の固有ベクトルである。
$\lambda = 2$ とする。
$(2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間がAの固有値 2 の固有空間 $W(2; A)$ である。
このとき $2E - A$ を簡約化すると

$$2E - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、$(2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (t \in \boldsymbol{R})$$

従って、

$$W(2; A) = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} | t \in \boldsymbol{R}\}$$

よって、$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に属する A の固有ベクトルである。

(3)

$$dim(W(1;A)) + dim(W(2;A)) = 1 + 1 = 2$$

となるので、A は対角化可能である。

さらに $W(1;A)$ と W(2; A) の基を用いて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(4)

(3) の結果により、$P^{-1}AP$ は対角行列なので

$$\left(P^{-1}AP\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

また、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

である。よって

$$\begin{aligned} A^n &= P\left(P^{-1}AP\right)^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & -1 + 2^n \\ 6 - 6 \cdot 2^n & -2 + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$