

B.5.8.(b)

$$(1) (a, b) = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 8 = 78$$

$$|a| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{66}$$

$$|b| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 8^2} = \sqrt{93}$$

$$a \times b = \begin{pmatrix} 4 \times 8 - 7 \times 5 \\ 7 \times 2 - 1 \times 8 \\ 1 \times 5 - 4 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(2) 求める平面上の任意の点 x を $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、求める平面は 2つの媒介変数 $s, t \in \mathbb{R}$ を用いて $x = P + s a + t b$ と表される。

よって、求める平面の媒介変数表示は、

$$\begin{cases} x = 3 + s + 2t & \dots \textcircled{1} \\ y = 6 + 4s + 5t & \dots \textcircled{2} \\ z = 9 + 7s + 8t & \dots \textcircled{3} \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R}) \quad \text{2"ある.}$$

(3) $\textcircled{1} \times 4 - \textcircled{2}$ より $4x - y = 6 + 3t$

よって $t = \frac{4x - y - 6}{3} \dots \textcircled{4}$ 2"ある.

また、 $\textcircled{1} \times 7 - \textcircled{3}$ より $7x - z = 12 + 6t$

よって $t = \frac{7x - z - 12}{6} \dots \textcircled{5}$ 2"ある.

$\textcircled{4}, \textcircled{5}$ より t を消去して $\frac{4x - y - 6}{3} = \frac{7x - z - 12}{6}$

よって $x - 2y + z = 0$

(4) $(a \times b, a) = 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 6 + 7 \cdot (-3) = 0$, $(a \times b, b) = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 6 + 8 \cdot (-3) = 0$ より、

$a \times b$ は a, b の両方と垂直なベクトルである。

このこと、点 P を通るという条件より、求める直線上の任意の点 x を $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、求める直線は媒介変数 $u \in \mathbb{R}$ を用いて $x = P + u(a \times b)$ と表される。

よって、求める直線の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = 3 - 3u \\ y = 6 + 6u \\ z = 9 - 3u \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R}) \quad \text{2"ある.}$$